UMET
UNIVERSIDAD
METROPOLITANA

ELEMENTOS
DE FUNCIONES TRASCENDENTES

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

UMET
UNIVERSIDAD METROPOLITANA

ELEMENTOS

DE FUNCIONES TRASCENDENTES

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

Con el auspicio de la Fundación Metropolitana

UMET
UNIVERSIDAD METROPOLITANA

ELEMENTOS

DE FUNCIONES TRASCENDENTES

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

Diseño de carátula: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Edición: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Corrección: MSc. Isabel Gutiérrez de la Cruz

Dirección editorial: Dr. C. Jorge Luis León González

Sobre la presente edición:

© Editorial Universo Sur, 2022

© Universidad Metropolitana de Ecuador, 2022

ISBN: 978-959-257-643-8

Podrá reproducirse, de forma parcial o total, siempre que se haga de forma literal y se mencione la fuente.

EDITORIAL UNIVERSO SUR

Editorial: "Universo Sur".

Universidad de Cienfuegos. Carretera a Rodas, Km 3 ½.

Cuatro Caminos. Cienfuegos. Cuba.

CP: 59430

INDICE

UNA INTRODUCCIÓN NECESARIA

En la introducción del TOMO I "*Funciones Algebraicas*" se expresaba que:

> "el concepto de función trasciende a todas las ramas de la matemática, desde las tradicionales álgebra y análisis matemático, geometría, trigonometría y la estadística hasta las más contemporáneas, en todas las funciones forman parte de su sistema conceptual en forma directa o indirecta, por eso, la formación de este concepto desde la enseñanza primaria y muy en particular en la enseñanza media y media superior resulta fundamental, para que al llegar los alumnos a niveles superiores, no aparezcan brechas que limiten el avance en los estudios, los ejemplos son innumerables y los docentes bien los conocemos".

Esta idea nos llevó a emprender la tarea de presentar a profesores y alumnos nuestras experiencias de trabajos con estudiantes de distintos niveles de enseñanza explicando funciones y otros temas relacionados con estos contenidos como ecuaciones, inecuaciones y sistemas. En realidad pensábamos escribir un solo libro, pero en la medida que se escribía y se incorporaba al texto gráficos generados con el asistente matemático GeoGebra, llegamos a la conclusión que, o renunciábamos al empleo de este asistente y escribíamos lo que tradicionalmente se ha escrito, o dividíamos el trabajo en dos partes, tratando primero las funciones algebraicas y después funciones trascendente, pero sin abandonar el empleo de los asistentes matemáticos, en particular el GeoGebra, porque esto constituía el sello diferenciador del libro; por otro lado, el empleo de este asistente facilitó el acercamiento a temas tratados en el nivel superior como son los de derivada, máximo, mínimo, áreas bajo curvas, entre otros, los cuales, aunque no se trataron con el nivel teórico que exige la matemática, los no conocedores del tema tuvieron al menos una noción geométrica de estos conceptos.

Como se declaró en el TOMO I se ha mantenido el propósito de complementar los textos escolares, aprovechando las posibilidades que ofrecen los medios de cómputos y las motivaciones que tienen los alumnos por su empleo.

Se ha mantenido en este TOMO II las 4 ideas esenciales del TOMO I:

1. El tratamiento de los conceptos fundamentales relacionados con funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.
2. El tratamiento “manual” de algoritmos relacionados con funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, con el propósito que el posterior tratamiento computacional de esos algoritmos no sea visto como una “caja negra”.
3. El tratamiento computacional de los algoritmos mencionados en (2) y la interpretación de los resultados que los mismos ofrecen.
4. Contribuir a la cultura general de los lectores a partir de lo que se ha llamado “pinceladas históricas”, porque consideramos que la matemática y su historia forman parte de la cultura universal.

El TOMO II ha tenido como nivel de partida los temas tratados en el TOMO I particularmente:

» El concepto de función, con énfasis en la identificación de las propiedades de cada función y su análisis gráfico a partir de la obtención de los mismos y los puntos más significativos mediante el empleo del GeoGebra.

» Las características de las funciones elementales y operaciones entre relaciones funcionales. En este aspecto nos referimos a: la función constante, la idéntica, la modular, la cuadrática, la cúbica y la recíproca, que resultan fundamentales para establecer analogías con las funciones trascendente y para el estudio de éstas y de sus inversas.

» Las que llamamos propiedades globales de las funciones: Dominio e imagen, extremos globales, ceros, signos y puntos fijos, simetría y paridad; inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, monotonía y continuidad, dado que estas propiedades se continúan estudiando en las funciones trascendentes y al igual que se hizo con las funciones algebraicas, para el tratamiento de algunas propiedades que se necesitan conocimientos de matemática superior se realizó un tratamiento gráfico

» Las funciones lineales y sus propiedades. incluyendo los tratamientos de la Geometría Analítica de sus ecuaciones paramétrica y vectorial, así como la solución de ecuaciones e inecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones, empleados en la solución de ecuaciones inecuaciones y sistemas de ecuaciones exponenciales, logarítmicos y trigonométricos.

» Las funciones cuadráticas; el dominio de sus propiedades y su empleo en el cálculo resultó fundamental para todo el estudio de las funciones trascendentes.

» Las funciones polinómicas. También estas funciones permitieron ampliar el tratamiento de las funciones trascendentes y combinarlas en su estudio.

» Las funciones racionales.

» Las funciones irracionales. Este contenido tuvo su mayor incidencia al estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas.

» La función modular. Particularmente el concepto de módulo y su aplicación en el estudio de funciones definidas por partes (por intervalos) fue un contenido empleado que fue tratado en el TOMO I.

» La resolución de problemas mediante funciones, ecuaciones, inecuaciones o sistemas algebraicos. La temática de la resolución de problemas tuvo más incidencia en el TOMO II que en el TOMO I, aunque en éste se sentaron las bases, pero las funciones trascendentes tienen una mayor aplicación a problemas de la ciencia y la técnica que las funciones algebraicas.

Para el segundo tomo se proyectaron los siguientes temas:

CAPITULO I. Funciones trascendentes, funciones exponencial y logarítmica.

En este capítulo se cumplió con lo proyectado, se presenta un capítulo con abundantes gráficas y esquemas algorítmicos que facilitan la comprensión tanto en la teoría como para la solución de problemas mediante asistentes matemáticos y manualmente. Se hace una abundante ejemplificación de la aplicación de las funciones exponenciales y logarítmicas a la ciencia que va desde la Psicología a la Teoría de la Información.

El estudio de las funciones trigonométricas se proyectó en dos capítulos:

CAPITULO II. Funciones trigonométricas, funciones seno, coseno y sus inversas.

CAPITULO III. Funciones tangente y cotangente y sus inversas.

Al escribir este TOMO II, se desarrolló en uno, pero en él se trataron

CAPITULO II. Funciones trigonométricas y sus inversas

» Introducción.

» Relaciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

» Relaciones trigonométricas de la suma y de la diferencia de los ángulos.

» Función seno.

» Función coseno.

» Funciones trigonométricas inversas.

» Funciones trigonométricas inversas.

» Las derivadas de las funciones trigonométricas y de sus inversas.

» Coordenadas polares. Con esto se introdujo el tratamiento de coordenadas polares con GeoGebra que se extendió a todos los contenidos posteriores.

» Ecuaciones paramétricas. De igual modo el tratamiento de ecuaciones paramétricas se extendió al estudio de las curvas especiales y a las curvas del espacio.

» Curvas especiales como la Bruja de Agnesi, la hipocicloide y otras.

» Funciones trigonométricas en curvas del espacio.

El estudio de las funciones hiperbólicas se proyectó también en dos capítulos:

CAPITULO IV. Funciones hiperbólicas, funciones seno y coseno hiperbólico y sus inversas.

CAPITULO V. Funciones tangentes y cotangente hiperbólica y sus inversas.

Se desarrolló en uno, donde se trataron

CAPITULO III. Funciones hiperbólicas

» Definición y ecuaciones de la hipérbola.

» Propiedades de la hipérbola.

» Funciones hiperbólicas y sus principales propiedades. Por analogía de las funciones trigonométricas se introdujeron las funciones hiperbólicas y sus propiedades

» Superficies de revolución generadas por funciones hiperbólica. Se introdujo el tratamiento de superficies de revolución mediante el GeoGebra y se extendió a todos los contenidos posteriores.

» Relaciones de las funciones hiperbólicas.

» Relaciones de las funciones hiperbólicas.

» Funciones hiperbólicas inversas.

» La espiral hiperbólica.

» La catenaria

CAPITULO IV. Ecuaciones recurrentes y funcionales

En este capítulo final se dio una introducción a las ecuaciones recurrentes, tema que es tratado por la Matemática Discreta, pero de gran importancia fundamentalmente en las carreras relacionadas con las Ciencias Informáticas, en el mismo se trataron las sucesiones recurrentes y las soluciones de ecuaciones recurrentes por una vía intuitiva y mediante la ecuación característica tanto para recurrencia homogénea como para las no homogéneas.

Respecto a las ecuaciones funcionales, realmente es un tema complejo, pero fue propósito de los autores dar una introducción al mismo, por la importancia que tiene en los concursos internacionales de matemática y para no sobrecargar el proceso de cálculo se hizo una simulación con el asistente GeoGebra que facilitó los cálculos al tiempo que los gráficos ilustraron las soluciones encontradas.

Agradecemos de los lectores las valoraciones del trabajo que presentamos a su consideración,

Los autores

CAPÍTULO I.
FUNCIONES TRASCENDENTES.
LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

El hecho de que ciertas funciones trascendentes especiales, importantes para el análisis, tomen valores algebraicos para ciertos argumentos algebraicos nos parece particularmente notable y digno de una investigación completa.

David Hilbert

"Los problemas futuros de la matemática"

1.1. Función trascendente.

PINCELADA HISTÓRICA

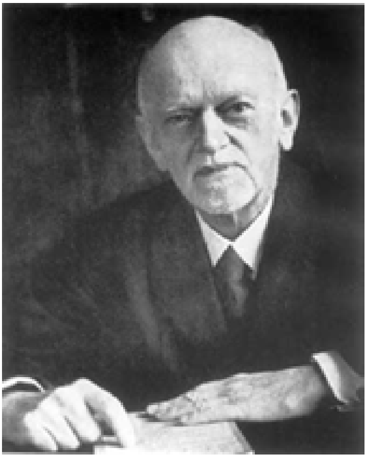


Figura 1. 1

David Hilbert: 23 enero 1862, Prusia –14 febrero 1943, Alemania. En el mundo se le consideró como "el más grande matemático vivo". Hizo grandes aportes a la configuración de los métodos axiomáticos actuales, sus profundos resultados

Para tener un primer acercamiento al concepto de función trascendente diremos que:

Una función trascendente es aquella que no satisface una ecuación polinomio cuyos coeficientes sean a su vez polinomios; esto contrasta con las funciones algebraicas, estudiadas en el tomo I, las cuales satisfacen dicha ecuación. En otras palabras, una función trascendente es una función que trasciende al álgebra en el sentido que no puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracción de raíces. Una función de una variable es trascendente si es independiente en un sentido algebraico de dicha variable.

A pesar de esta diferenciación, en el desarrollo histórico ha sucedido que operaciones con funciones algebraicas generan funciones trascendentes, ejemplo, la operación de calcular la función primitiva (o integral indefinida) en álgebra, teoría de números, geometría y teoría de funciones, los celebérrimos “problemas matemáticos” que dejó planteó en 1900, y las venturas y desventuras de sus intentos por resolver la cuestión de los fundamentos de la matemática. Desafortunadamente fue testigo del desmantela-miento de la ciencia alemana por parte de los nazis.

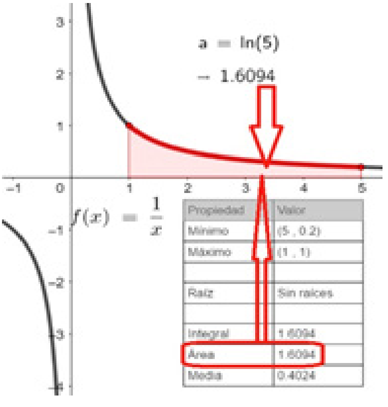


Figura 1. 2

En la gráfica se muestra el área bajo la curva definida por la función recíproca comprendida entre 1 y 5, la cual calculada por el asistente GeoGebra da como resultado 1,6094 y coincide con el logaritmo neperiano de 5 (ln (5) =1,6094)

de una función algebraica es una fuente de funciones trascendentes, ese es el caso de la función logarítmica, surgida a partir de la función recíproca en un intento para calcular el área de un sector hiperbólico (figura 1.2).

Por lo tanto, el ángulo hiperbólico y las funciones hiperbólicas seno hiperbólico (senh), coseno hiperbólico (cosh), y tangente hiperbólica (tanh) son todas funciones trascendentes; todas ellas serán estudiadas en este libro.

En las funciones trascendentes la variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo, de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría o de los que identifican a las funciones hiperbólicas, tal como se muestra en figura 1.3.

1.2. Ecuaciones trascendentes.

En las ya estudiadas ecuaciones algebraicas se estudiaron las transformaciones algebraicas de la ecuación F=0 que a modo de recordación son las siguientes:

1. La adición a ambos miembros de la ecuación de una misma expresión algebraica.
2. La multiplicación de ambos miembros de la ecuación por misma expresión algebraica.
3. La elevación de ambos miembros de la ecuación a una potencia racional.

Las ecuaciones que no se pueden resolver mediante las transformaciones algebraicas antes referidas, se llama ecuación

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x}} - (0.2)^{2x}$$

$$g(x) = \sqrt[x+2]{\frac{1}{4}} - 2$$

$$h(x) = \cos(x^2 + 2x - 3)$$

$$k(x) = \log_{10}(x - 5) - 4$$

$$v(x) = \log_{(x-5)}(10) - 20$$

$$w(x) = \cosh(x^2 + 2x - 3)$$

Figura 1. 3

Ejemplo de funciones trascendentes.

Figura 1. 4

Monumento a π en Cúcuta, Colombia por ser el más conocido e importante número trascendente.

trascendente y asociadas a ellas existen los llamados números trascendentes Un número trascendente o número trascendental es un número real o complejo que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos y esto lo diferencia de los números algebraicos. Los trascendentales son números irracionales; se conocen muy poco de estos números y demostrar que un número pertenece a este conjunto puede ser extremadamente difícil. La denominación «trascendental» la acuñó Leibniz en un artículo publicado en 1682 donde demostró que la función sen(x) no es una función algebraica; posteriormente Euler definió los números trascendentes en el sentido moderno, pero la existencia de los números trascendentes fue finalmente probada en 1844 por Joseph Liouville. En 1882, Carl Louis Ferdinand von Lindemann publicó una demostración de que *π* es trascendente.

Las ecuaciones trascendentes más simples son las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, pero antes de tratarlas nos detendremos en algunos conceptos fundamentales del álgebra elemental.

1.3. Potencias, raíces y logaritmos.

La potenciación, la radicación y la logaritmación son tres operaciones íntimamente relacionadas. El esquema adjunto (Figura 1.5) muestra esa relación; aunque ella tiene intenciones esencialmente didácticas, ilustra esa relación, que se complementa con las expresiones numéricas adjuntas a la misma figura.

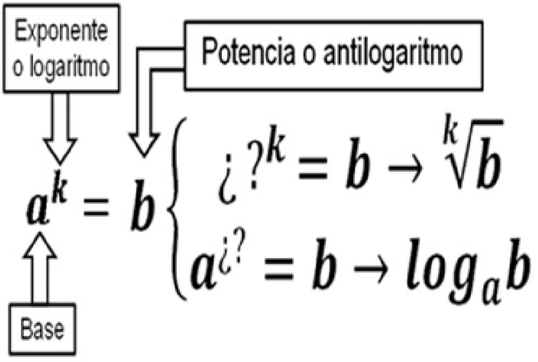


Figura 1. 5
Potencias raíces y logaritmos

$$2^3 = 8;$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$log_2 8 = 3$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$$

Después de esta visión general es necesario precisar definiciones, muchas conocidas por el lector, pero que vale la pena recordar.

Si el número b se obtiene como resultado de la multiplicación del número a por sí mismo n veces (como se ilustra en figura 1.5) el resultado se llama potencia natural de a y se denota a^n.

Otras definiciones relacionadas con la potenciación son:

D_1: Para $a \neq 0$ se define $a^0=1$; 0^0 no está definido.

D_2: Para a $a \neq 0$ se define $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Observe que n es un número natural.

D_3: La única solución positiva de la ecuación $x^n=a$ es la raíz de n-simas potencia (o raíz aritmética de n-sima potencia) del número real positivo a; la cual se designa con $\sqrt[n]{a}\ o\ a^{\frac{1}{n}}\ la\ raíz\ de\ segunda\ potencia$; se expresa por $\sqrt{a}$

D_4: Para $a = 0, \sqrt[n]{0} = 0\ o\ 0^{\frac{1}{n}} = 0$. Si un número real a es negativo, la raíz

PINCELADA HISTÓRICA

A Leonard Euler se debe la fórmula más bella de la Matemática

$$e^{i\pi}+1=0$$

En ella aparecen los núme-ros trascendentes más im-portantes:

a) e, número de Euler

b) π, la longitud de la semicircun-ferencia unitaria.

Estos trascendentes están relacionados con las unidades más significativas de la matemática:

c) i, la unidad imaginaria.

d) 1, el elemento neutro para el producto

e) 0, el elemento neutro para la suma.

Además, en la fórmula aparecen las tres operaciones importantes de la aritmética: adición, multiplicación y exponenciación.

Nadie ha sido capaz de lograr otra fórmula que la supere en belleza y síntesis.

Ante la identidad de Euler hay que recordar la frase de Galileo Galilei:

«La filosofía está escrita en ese gran libro que es el universo, el cual permanece continuamente abierto ante nuestros ojos.

Pero ese libro no nos es inteligible a menos que antes aprendamos a comprender el idioma e interpretar los signos de que está compuesto. Está escrito en el idioma de las matemáticas, y sus signos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él…»

de n-sima potencia del número a se halla sólo para n impar como solución real negativa de la ecuación $x^n=a$

D_5: El número $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ se llama potencia racional $\frac{m}{n}$ $con\ m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}; a \ \in \mathbb{R}$ y se escribe de la siguiente forma:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

De las definiciones anteriores se infieren las siguientes proposiciones:

i. $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3+2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

ii. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$

iii. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2}$

iv. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

De la definición de exponente racional mediante procedimientos matemático se generaliza el concepto a potencia o exponente real con las siguientes propiedades:

i. $a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha}.a^{\beta}$ $\qquad$ $3^{\frac{1}{2}+\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times 3^{\sqrt{3}}$

ii. $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$ $\qquad$ $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt[3]{3}} = 3^{\sqrt[6]{3^5}}$

iii. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ $\qquad$ $\frac{3^{\sqrt{3}}}{3^{\sqrt[3]{2}}} = 3^{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$

iv. $(a.b)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha}$ $\qquad$ $(3.2)^{\sqrt[3]{2}} = 3^{\sqrt[3]{2}}.2^{\sqrt[3]{2}}$

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\sqrt[3]{2}}}{3^{\sqrt[3]{2}}}$

Una aplicación particular de la potenciación es la sucesión $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2	20	2,65329771	220	2,71212955	600	2,71602005	1350	2,71727574
2	2,25	30	2,67431878	240	2,71264029	640	2,71616121	1400	2,71731165
3	2,37037037	40	2,68506384	260	2,71307273	680	2,71628578	1450	2,71734508
4	2,44140625	50	2,69158803	280	2,71344359	720	2,71639653	1500	2,71737629
5	2,48832	60	2,69597014	300	2,71376516	760	2,71649564	1550	2,71740548
6	2,521626372	70	2,69911637	320	2,71404664	800	2,71658485	1600	2,71743285
7	2,546499697	80	2,70148494	340	2,7142951	840	2,71666557	1650	2,71745856
8	2,565784514	90	2,70333246	360	2,71451602	880	2,71673896	1700	2,71748276
9	2,581174792	100	2,70481383	380	2,71471375	920	2,71680597	1750	2,71750558
10	2,59374246	110	2,70602808	400	2,71489174	960	2,71686741	1800	2,71752713
11	2,604199012	120	2,70704149	420	2,71505283	1000	2,71692393	1850	2,71754752
12	2,61303529	130	2,70790008	440	2,71519929	1040	2,71697611	1900	2,71756684
13	2,620600888	140	2,70863681	460	2,71533305	1080	2,71702443	1950	2,71758516
14	2,627151556	150	2,70927591	480	2,71545568	1120	2,7170693	2000	2,71760257
15	2,632878718	160	2,70983558	500	2,71556852	1160	2,71711108	2050	2,71761913
16	2,637928497	170	2,71032975	520	2,7156727	1200	2,71715008	2100	2,7176349
17	2,642414375	180	2,7107693	540	2,71576917	1240	2,71718656	2150	2,71764994
18	2,646425821	190	2,71116279	560	2,71585876	1280	2,71722076	2200	2,71766429
19	2,650034327	200	2,71151712	580	2,71594218	1320	2,71725289	2250	2,71767801

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 1. 6

John Napier (Edinburgo, Es-cocia 1550 - 4 de abril de 1617). Estudió en la Universi-dad St. Andrés. En 1517 retor-nó a Escocia y tomó parte en las controversias religiosas de ese tiempo. Estudió Matemáti-ca como pasatiempo. En 1614 publicó una descripción de cómo multiplicar y dividir con la ayuda de logaritmos, palabra compuesta de dos vocablos griegos “logos” (relación) y “arithmos” (número). Indepen-diente de Napier el suizo Burgi trabajó en la multiplicación de logaritmos, pero fue el Inglés Henry Briggs, quien comenzó a usar los logaritmos de base 10

Los logaritmos fueron una va-liosa herramienta de cálculo para los astrónomos. Hoy las calculadoras y computadoras han tomado su lugar, no obs-tante, la teoría de los logarit-mos resulta relevante para la Matemáticas puras y sus apli-caciones en los estudios de las ciencias naturales.

Evidentemente, a partir de 2,71 la sucesión de dígitos varía, pero “tendiendo a un valor”, expresado matemáticamente mediante la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

Este número se conoce como constante de Euler, el cual es irracional y trascendente y cuyo valor aproximado es

$$e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459..$$

El número e tiene una extraordinaria importancia en la Matemática como se verá posteriormente.

En la introducción de este epígrafe es ilustró la relación entre potencias, raíces y logaritmos, para complementar y generalizar lo planteado respecto a la potenciación se tratará la logaritmación.

El logaritmo base a de b se define como:

$$\log_a b \ \ (a>0; a\neq 1; b>0)$$

Es el único número real c que satisface la condición de que $a^c=b$. $\log_3 9=2$ porque $3^2=9$

La definición dada tiene varias condiciones que hay que tomar en consideración en todo cálculo o análisis que se realice donde se aplique el concepto de logaritmo; estas propiedades se infieren de la definición:

a) $a^{log_a b} = b \; (a > 0; a \neq 1; b > 0) \quad 3^{\log_3 9} = 3^2 = 9$

b) $a^c=b$ y $c=\log_a b$ ($a>0;a\neq 1;b>0$) son para los números a, b y c, dos formas de expresar el mismo planteamiento: $\log_3 9=2 \Leftrightarrow 3^2=9$

c) $\log_a b=c \Leftrightarrow a^c=b$ Esta equivalencia es fundamental para la solución de ecuaciones de este tipo.

d) Dado que $a^0=1$ ($a \neq 0$) y $a^1=a$ para toda base positiva a, con $a \neq 1$, se cumple que:

$\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$

Otras propiedades importantes son:

e) $\log_a (b_1 b_2)=\log_a (b_1)+\log_a (b_2)$ ($b_1 > 0$, $b_2 > 0$)

$\log_2 (512)=\log_2 (32\cdot 12)=\log_2 (32)+\log_2 (16)=5+4=9 \Leftrightarrow 2^9=512$

f) $log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = log_a(b_1) - log_a(b_2) \; (b_1 > 0, b_2 > 0)$

$$log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}) - log_{\sqrt{2}}(4) = 1 - 4 = -3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

g) $\log_a b^c = c \times \log_a b$ ($b>0$)

$\log_2 8^{12}=12 \times \log_2 8=12\times 3=36$

h) Particularmente para el caso en que c sea un número fraccionario que exprese un radical la fórmula adopta la siguiente expresión:

$$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{log_a b}{n} \; (b > 0)$$

$$log_2 \sqrt[6]{64} = \frac{log_2 64}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

i) $log_a c = \frac{log_b c}{log_b a}$; $log_a c = \frac{1}{log_c a}$ Esta fórmula permite el cambio de base.

Calcular $log_{16} 32 = \frac{log_2 32}{log_2 16} = \frac{5}{4} \Rightarrow 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{16^4 \cdot 16} = \sqrt[4]{16^4 \cdot 2^4} = 16 \cdot 2 = 32$

j) $a^x = e^{x \ln(a)}$ Esta es una expresión fundamental que relaciona la función exponencial y la logarítmica.

Particular importancia tienen las bases 10 y e expresadas mediante lg y ln respetivamente, es decir: $\log_{10} k$ se expresa: $\lg k$ y $\log_e k$ se expresa: $\ln k$

1.4. Función exponencial y logarítmica.

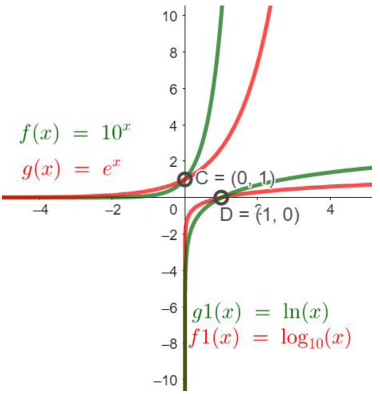


Figura 1. 7 Gráficos de las funciones exponencial y logarítmica con bases 10 y e res-pectivamente.

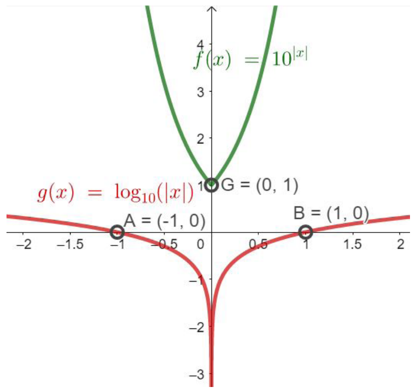
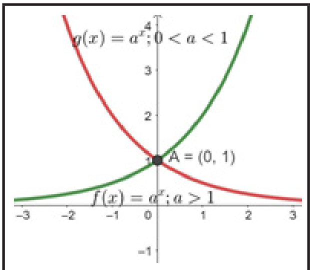
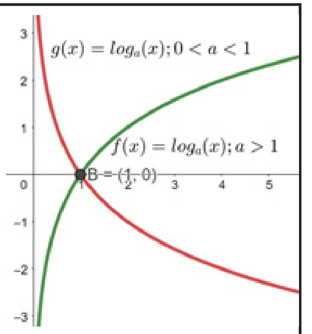
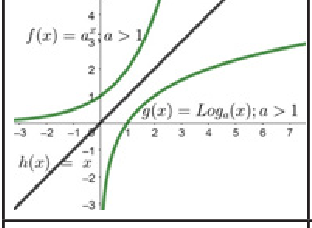
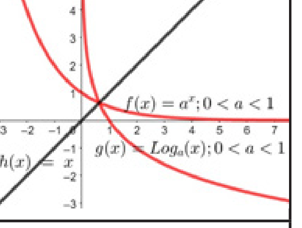


Figura 1. 8 Gráficos de funciones exponenciales y logarítmicas compuesta con la función módulo.

Función exponencial		**Función logarítmica**
Dado $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$, se llama función exponencial a toda función de la forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = a^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$	**Definición** Símbolos utilizados: ∈:elmento de o pertenece a ∀:para todo… o para cualquier $\mathbb{R}$: números reales $\mathbb{R}_+^*$:reales positivos excluyendo al cero	Dado $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$, se llama función loga-rítmica a toda función de la forma $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$: $f(x) = log_a x, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$

	**Gráfico**	
$\mathbb{R}$	**Dominio**	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_+^*$	**Imagen**	$\mathbb{R}$
Estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ si a>1 y estrictamente decreciente si 0<a<1	**Monotonía**	Estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+^*$ si a>1 y estrictamente decreciente si 0<a<1
No tiene; Im f = $\mathbb{R}_+^*$	**Ceros**	x=1
Punto (0,1)	**Intersección con el eje y**	No tiene, Dom f = $\mathbb{R}_+^*$
Es inyectiva	**Inyectividad**	Es inyectiva
No es sobreyectiva	**Sobreyectividad**	Es sobreyectiva
Positiva en todo $\mathbb{R}$	**Signos**	$\begin{cases} a > 1 \begin{cases} + en]1, \infty[\\ - en]0,1[\end{cases} \\ 0 < a < 1 \begin{cases} + en]0,1[\\ - en]1, \infty[\end{cases} \end{cases}$
No tiene	**Mínimo /máximo global**	No tiene
	**La función logarítmica es la inversa de la exponencial. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto a la recta h(x)=x**	

1.5. Algunas aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica:

Función exponencial:

- **La desintegración de substancias radioactivas[1]:** Una sustancia radiactiva se desintegra (y se convierte en otro elemento químico) de acuerdo con la fórmula:

$N = N_0\ e^{-\lambda t}$, donde:

N_0: Número inicial del núcleo.

λ: Constante característica de la substancia llamada constante de desintegración (para el radio $\lambda = 1{,}382.10^{-11}\ s^{-1}$).

Figura 1. 9 Símbolo de advertencia de radiactividad adoptado por la ISO en 2007 para fuentes que puedan resultar peligrosas.

- **Prueba del carbono 14[2]:** El carbono 14(14C), es un isótopo radiactivo de dicho elemento, que tiene alrededor de 5750 años como promedio de vida Determinando la cantidad de 14C que contienen los restos de lo que fue un organismo vivo, es posible determinar qué porcentaje representa de la cantidad original de 14C, en el momento de la muerte. Con esta información, la fórmula

---

[1] Radioactivas, relativo a Radiactividad o radioactividad: fenómeno físico mediante el cual los nú-cleos de algunos elementos químicos, llamados radiactivos, emiten radiaciones que tienen la pro-piedad de impresionar placas radiográficas, ionizar gases, producir fluorescencia, atravesar cuer-pos opacos a la luz ordinaria, entre otros.

[2] **Carbono-14**: isótopo radiactivo del carbono. Su núcleo contiene 6 protones y 8 neutrones. Su valor para el periodo de semidesintegración o semivida de este isótopo: es de un aproximado de 5568 a 5730 años; por estar presente en todos los materiales orgánicos se emplea en la datación de especímenes orgánicos.

$R = R_0\, e^{kt}$ permite calcular la antigüedad de los restos, al resolver la ecuación para la variable t.

- **Cálculo de una reacción en cadena**[3]: El proceso de fisión nuclear [4] se inicia por la absorción de un neutrón que libera cierta cantidad de neutrones en los núcleos fisionados. Estos neutrones provocan rápidamente la fisión de varios núcleos más, con lo que liberan otros cuatro o más neutrones adicionales e inician una serie de fisiones nucleares automantenidas, una reacción en cadena que lleva a la liberación continuada de energía nuclear. Este proceso se modela mediante la siguiente ecuación: $N = N_0 e^{(v-l)\frac{t}{l}}$ donde N_0 : es el número inicial (t =0) de neutrones libres.

  v: factor de reproducción.

  l: tiempo promedio entre dos generaciones sucesivas de neutrones en el tiempo: t.

  v: cantidad de neutrones que produce en cada generación cada neutrón libre efectivo.

- **Interés compuesto**: Cuando una inversión gana un interés compuesto, esto significa que el interés obtenido después de un periodo fijo de tiempo se agrega a la inversión inicial y, entonces, el nuevo total, gana intereses durante el siguiente periodo de inversión; y así, sucesivamente: La fórmula del acumulado al cabo de un tiempo t es $A_t = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ siendo:

  n: periodos redituables por año.

  r: por ciento de interés compuesto anual.

[3] **Reacción en cadena**: reacción física o química automantenida en la que los productos de cada etapa son los reactivos de la siguiente. Especialmente, una serie de reacciones de fisión nuclear.

[4] **Fisión nuclear**: Rotura del núcleo de un átomo, con liberación de energía, tal como se produce mediante el bombardeo de dicho núcleo con neutrones.

P: inversión de P pesos gana intereses cada año.

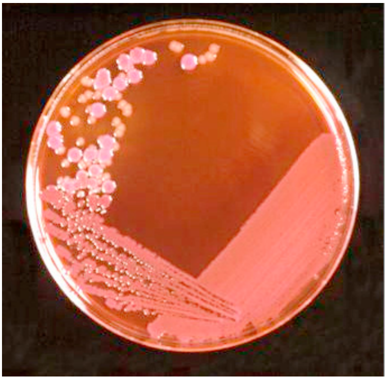


Figura 1. 10 Colonias de bacterias Escherichia coli (más grande, rosa) y Proteus vulgaris (más pequeña, de color castaño) que crecen juntas en una placa Petri.

- **Los procesos de crecimiento biológico**: Crecimientos de un cultivo de bacterias, incremento de la cantidad de madera en un bosque se pueden expresar de manera simplificada mediante la función exponencial:

$m = m_0\ e^{at}$ con:

m_0: cantidad de materia en un instante $t_0=0$.

a: constante de crecimiento de la materia de que se trate.

m: cantidad de materia en un instante $t \geq t_0$.

- **El crecimiento de la producción social**: En 1893 V.I. Lenin a partir del modelo de Marx y tomando en cuenta otros factores como el progreso científico-técnico planteó la siguiente ecuación:

$K=100[1+v(e^{\varphi t}-1)]$ con $(v>0)$ donde:

K: índice de producción.

t: tiempo en años.

φ: constante numérica, en el ejemplo de Marx $\varphi=0{,}0953(\text{años})^{-1}$

- **Cálculo de la cantidad de medicamento que se elimina del organismo a través de la orina.**

La cantidad de medicamento que se elimina del organismo a través de la orina viene expresada mediante la siguiente función exponencial:

Figura 1. 11

Vladímir Ilich Uliánov, alias Lenin (Simbirsk, 22 de abril de 1870; Gorki, 21 de enero de 1924), fue un político, revolucionario, teórico político y comunista ruso. Líder del sector bolchevique del Partido Obrero Socialdemócrata de Rusia, se convirtió en el principal dirigente de la Revolución de Octubre de 1917. En 1917 fue nombrado presidente del Consejo de Comisarios del Pueblo, convirtiéndose en el primer y máximo dirigente de la Unión de Repúblicas Socialis-tas Soviéticas (URSS) en 1922.

$A(t)=10 * (0.8)^t$

Donde A(t) es la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo t horas después de suministrado el mismo. En Figura 1.12 se muestra la gráfica de esta función.

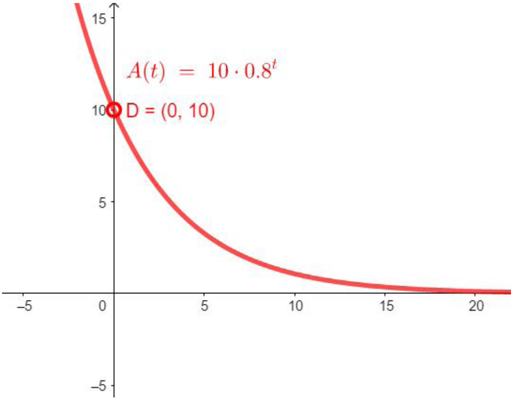


Figura 1. 12 Función que modela el cálculo de la cantidad de medicamento que se elimina del organismo a través de la orina en un tiempo t

En realidad esta fórmula es un caso particular de la correspondiente a llamada semivida de eliminación, término empleado en medicina y farmacología, también llamada semivida, hemivida, o vida mitad de un medicamento (o cualquier agente xenobiótico[5]) en sangre es el tiempo que tarda en eliminarse el 50% de la concentración plasmática alcanzada por una dosis del mismo, es decir, el lapso necesario para que la cantidad de agente presente en el cuerpo (o en el plasma sanguíneo) se reduzca a la mitad, mediante diversos procesos de eliminación. Es un parámetro fundamental para conocer los intervalos de aplicación de dicho fármaco. La semivida de eliminación es un parámetro importante usado en farmacodinámica y se denota como $t_{\frac{1}{2}}$.

[5] Compuestos cuya estructura química en la naturaleza es poco frecuente o inexistente debido a que son compuestos sintetizados por el ser humano en el laboratorio.

La fórmula correspondiente a la semivida de eliminación es:

$C_t=C_0\ e^{-kt}$

Donde:

C_t: Concentración del medicamento después de un tiempo t.

C_0: Concentración inicial del medicamento (t=0)

k: Constante de eliminación

Como puede observarse esta fórmula es más general que la anterior.

La relación entre la constante k: de eliminación y la semivida ($t_{\frac{1}{2}}$) viene dada por la siguiente fórmula que contiene una expresión logarítmica:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

Por su parte, la semivida está determinada por la separación[6] (CL, del inglés clearance) y el volumen de distribución (VD), mediante la siguiente fórmula que también incluye una expresión logarítmica:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{(\ln 2) * VD}{CL}$$

- **La curva del olvido**: Permite modelar la pérdida de retentiva con el tiempo y se ha desarrollado a partir de los trabajos del psicólogo alemán Hermann Ebbinghaus, autor de un trabajo sobre la memoria (1885), en él Ebbinghaus estudió la memorización de sílabas sin sentido, como “WID” y “ZOF”. Al hacerse pruebas a sí mismo a distintos intervalos, pudo describir la forma de la curva de la memoria que se corresponde con la función exponencial:

$$R = e^{\frac{-t}{S}}$$

[6] La depuración, separación, o aclaramiento (CL, del inglés clearance) de una sustancia es el inverso del tiempo constante que describe su índice de eliminación del cuerpo dividido por su volumen de distribución (o total de agua corporal).

Figura 1. 13

Hermann Ebbinghaus (24 de enero de 1850 - 26 de fe-brero de 1909) Filósofo y psicólo-go alemán. Nació en Barmen, ciu-dad cercana a Bonn. A los 17 años acudió a Bonn para estudiar historia y filosofía, luego partió a Halle y más tarde a Berlín. Sus estudios fueron interrumpidos por la guerra franco-prusiana, durante la cual prestó servicio en el ejérci-to. En 1873 obtuvo su título en filosofía en la Universidad de Bonn, con una tesis sobre la filo-sofía del inconsciente de Eduard von Hartmann.

Donde:

R: Retentiva.

S: Intensidad relativa del recuerdo que indica cuánto se mantiene un contenido en el cerebro, de modo que, a mayor intensidad de un recuerdo, más tiempo se mantiene.

t: El tiempo.

Un gráfico típico de la curva del olvido Figura 1.13, muestra que normalmente en unos días o semanas se olvida la mitad de lo que hemos aprendido, a no ser que lo repasemos.

La velocidad con la que olvidamos depende de diversos factores, como la dificultad de la materia (por ejemplo, si es absurdo o tiene sentido), su representación y factores fisiológicos como el estrés y el sueño.

La curva de la memoria tiene una pendiente muy grande cuando se memoriza material sin sentido, como hizo Ebbinghaus. Sin embargo, es casi plana cuando se trata de experiencias traumáticas.

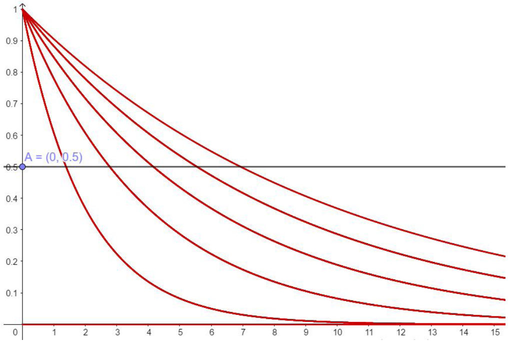


Figura 1. 14 Familia de curvas del olvido.

Función logarítmica:

Escala logarítmica: Hay procesos físicos, biológicos y sociales descritos mediante expresiones exponenciales que resultan difícil de graficar para determinados valores, porque sus imágenes dan valores muy grandes o muy pequeños; una solución de este problema es el empleo de una escala logarítmica.

En las gráficas se representan la misma función en dos escalas, observe que g(x) (Figura 1.11) resulta de tomar logaritmos en ambos miembros de f(x) (Figura 1.12) y después realizar un cambio de variables; compare además los ejes de ordenadas de ambos gráficos; para f se tiene una escala estándar, pero para g se ha empleado una escala logarítmica, esto es, 2 se corresponde con log(2), 3 con log(3) y así sucesivamente, esto es lo que facilita la conversión de una función exponencial a una línea recta cuyos coeficientes son los logaritmos de los parámetros de la función exponencial.

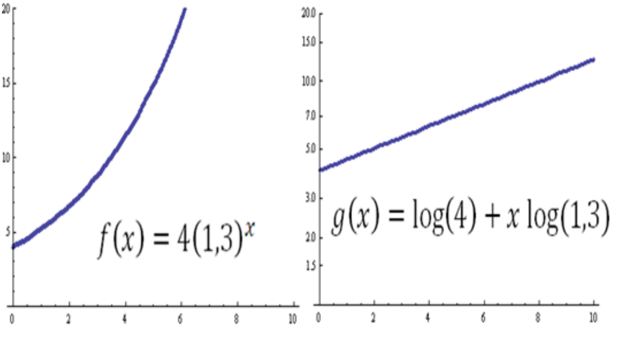


Figura 1. 16

- **Escalas de intensidad sísmica**: Las escalas de medida de la intensidad de los terremotos más comúnmente utilizadas son de tipo logarítmico. Así, la escala de Richter utiliza una escala logarítmica de base10, con lo que cada aumento de grado en esta escala no se corresponde con un aumento lineal de la magnitud de un seísmo, sino exponencial: un terremoto de grado seis es diez veces menos intenso que uno de grado siete, y cien veces menos que uno de grado ocho.

Fórmula de la escala de Richter

$$\left(M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2.92 = \log_{10}\left(\frac{A * \Delta t^3}{1.62}\right)\right)$$

donde:

A = amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma.

Δt = tiempo en segundos desde el inicio de las ondas P (Primarias) al de las ondas S (Secundarias).

M = magnitud arbitraria pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

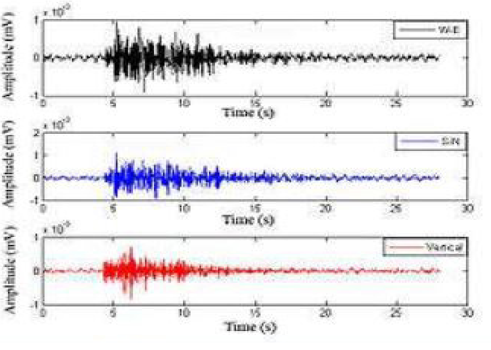


Figura 1. 17

Sismograma de tres componentes perpendiculares (norte-sur, este-oeste y arriba-abajo)

- **La intensidad sonora**: Las unidades utilizadas comúnmente para medir los niveles de intensidad de un sonido, llamadas belio y decibelio, son en realidad relativas y de naturaleza logarítmica. Así, un decibelio se define en acústica como la décima parte del logaritmo decimal del cociente entre la intensidad de un sonido y una intensidad umbral tomada como referencia.

Para el cálculo de la sensación recibida por un oyente, a partir de las unidades físicas medibles de una fuente sonora, se define el nivel de potencia, L_W, en decibelios, y para ello se relaciona la potencia de la fuente del sonido a estudiar con la potencia de otra fuente cuyo sonido esté en el umbral de audición, por la fórmula siguiente:

$$L_W = 10 \times \log_{10}\frac{W_1}{W_0}(dB) = 10 \times \log_{10}\frac{W_1}{10^{-12}}(dB)$$

Figura 1. 18

Charles Francis Richter (1900-1985), Nació en Ohio. Estudió en la Universidad de Stanford. En 1928 empezó a trabajar en su doctorado en Física teórica en el Instituto de Tecnología de California (Caltech). Trabajó en el Carnegie Institute de Washington y en el Laboratorio de Sismología de Pasadena. En 1935 Richter y Gutenberg desarrollaron una escala para medir la intensidad o magnitud de los terremotos, llamada escala de Richter.

En donde W_1 es la potencia a estudiar, en vatios (variable), W_0 es el valor de referencia, igual 10^{-12} vatios/m^2 y $\log_{10}$ es el logaritmo en base 10 de la relación entre estas dos potencias. Este valor de referencia se aproxima al umbral de audición en el aire. Si W_1 es mayor que la potencia de referencia W_0 el valor en decibelios es positivo. Y si W_1 es menor que la referencia W_0 el resultado es negativo. Un aumento en un factor 10 (10 veces) en la potencia W_0 con respecto a la referencia significa un aumento de 10 unidades (10 dB) aditivas en la escala logarítmica (intensidad subjetiva). Y que al aumentar al doble (factor 2) la potencia W_1 con respecto a W_0 significa un aumento aditivo de 3 dB en la escala logarítmica ($\log_{10} 2$=0.301B=3.01 dB).

- **Datación de vestigios arqueológicos**: Al tratarla función exponencial se planteó la fórmula que permite determinar la prueba del carbono 14 que en su expresión logarítmica despejando t es Para

$$R_0 > 0, k \neq 0 \; y \; R > 0, t = \frac{\log\left(\frac{R}{R_0}\right)}{k}$$

La determinación del pH: El pH de una solución se define por la fórmula

$pH = log\left(\frac{1}{H}\right)$ Donde H es la concentración de iones hidrógenos de una solución. Si pH =7 la solución es neutra, si pH >7 la solución es alcalina y si pH <7 la solución es ácida.

Figura 1. 19

Søren Peter Lauritz Sørensen (Havrebjerg, 9 de enero de 1868-Charlottenlund, 12 de febrero de 1939) químico danés cuyo mayor aporte fue introdu-cir la escala de potencial de hidrógeno (pH). Tras obtener su doctorado por la Universidad de Copenhague, fue jefe del departamento de química del prestigioso Laboratorio Carls-berg de Copenhague. Mientras trabajó en el Laboratorio Carls-berg, estudió el efecto de la concentración de los iones sobre las proteínas, y por qué el ion H+ era particularmente importante. Fue el introductor de la escala de pH como un modo simple de expresión de ello en 1909.

- **El pentagrama**: Otro ejemplo de escala logarítmica es el pentagrama utilizado en los países occidentales para escribir música, pues, como se ve en el gráfico, la diferencia en la altura del sonido es proporcional al logaritmo de la frecuencia (de un do grave al do siguiente más agudo la frecuencia se dobla. Es decir: que la sucesión de frecuencias de las notas do está en progresión geométrica). [La escala logarítmica es de base 2.]

- **La curva del aprendizaje**: Análoga a la curva del olvido existe la curva del aprendizaje, pero esta vez es una función logarítmica; en realidad existen varias de estas curvas que modelan el grado de éxito obtenido durante el aprendizaje en el transcurso del tiempo, pero la más conocida es la siguiente:

$$Y_x = Kx^{\log_2 b}$$

Donde:

K: Número de horas invertida la primera ejecución (o para producir la primera unidad).

Y_x: Número de horas invertidas en la x-ésima ejecución (o para producir la x-ésima unidad).

x: Número de la unidad.

b: Porcentaje de aprendizaje.

En figura 1.20 se muestra una gráfica de aprendizaje para un 90% de aprendizaje, tardando 100 horas en la primera ejecución. En el punto A se muestran el valor que alzaría en ejecutar el mismo trabajo en la vez número 30, en este caso se lograría en 59.63 horas.

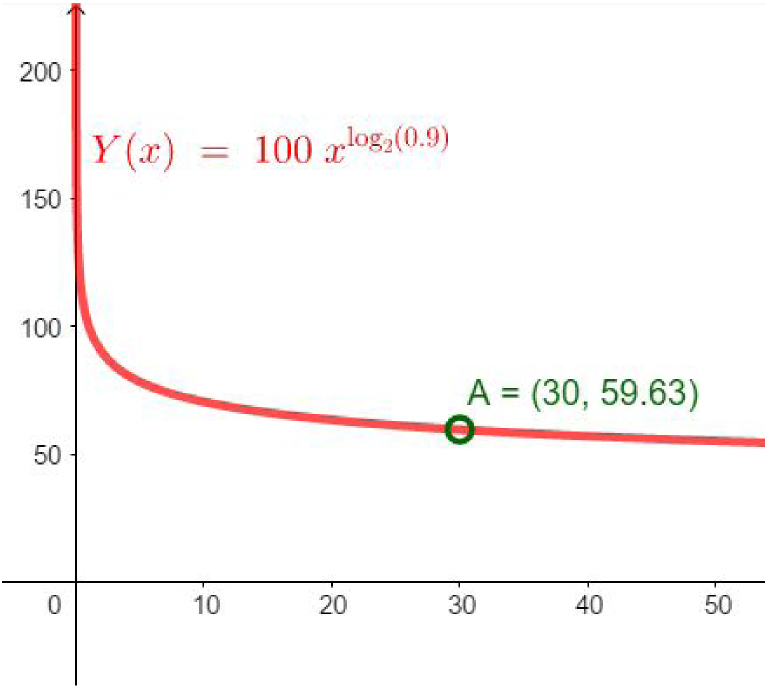


Figura 1. 20 Gráfica de aprendizaje

- **La ecuación se Shannon**: En los sistemas de comunicación moderno, para determinar la velocidad máxima de trasmisión se emplea la ecuación de Shannon, quien es considerado el padre de la teoría de la información.

Esta es una expresión logarítmica y está enunciada en el teorema de Shannon-Hartley el cual expresa que:

“Considerando todas las posibles técnicas de codificación de niveles múltiples y polifásicas, la capacidad del canal C es:

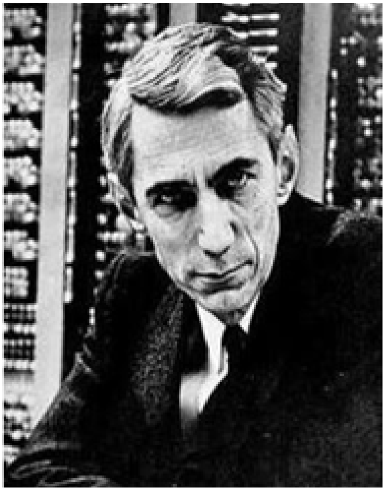


Figura 1. 21

Claude Elwood Shannon (1916-2001), ingeniero electrotécnico y matemático estadounidense, famoso por su desarrollo de la teoría de la comunicación, conocida actualmente como teoría de la información. Nació en Gaylord, Michigan, estudió en la Universidad de Michigan y en 1940 obtuvo su doctorado en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, donde se convirtió en miembro del cuerpo docente en 1956. En 1948 publicó *The Mathematical Theory of Communication (La teoría matemática de la comunicación)*, un artículo en el que presentaba su concepto inicial de una teoría de unificación de la transmisión y tratamiento de la información. En este contexto la información incluye todas las formas de mensajes transmitidos, incluso los enviados a lo largo de los sistemas nerviosos de organismos vivos. La teoría de la información tiene gran importancia en la actualidad en muchos campos.

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

Donde:

B : Ancho de banda del canal en Hertzios.

C : Capacidad del canal (tasa de bits de información bit/s)

S: Potencia de la señal útil, que puede estar expresada en vatios, milivatios, etc., (W, mW, etc.)

N: Potencia del ruido presente en el canal, (mW, μW, etc.) que trata de enmascarar a la señal útil".

Otra expresión logarítmica relaciona con esta fórmula expresa la relación entre SNR (signal to noise ratio, relación señal a ruido) y $\frac{S}{N}$ mediante la fórmula:

$$SNR(en\ dB) = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

De modo que $\frac{S}{N} = 10^{\frac{SNR}{10}}$

- **La espiral logarítmica**: Según el diccionario de Real Academia de la Lengua Española la espiral es una "curva plana que da indefinidamente vueltas alrededor de un punto, alejándose de él más en cada una de ellas", ella se encuentra en desde la naturaleza hasta el arte; por otro lado, existen distintas formas de generar una espiral y ellas son modeladas por distintas ecuaciones; así la espiral de Arquímedes está modelada por la ecuación $r=a+b\theta$ donde a y b son números reales y θ es un real que controla el ángulo de giro, de manera que Cuando el parámetro a cambia, la espiral gira, mientras que b controla la distancia en giros sucesivos; la espiral de Fermat está modelada por la ecuación $r=\theta^{\frac{1}{2}}$ y la ecuación de la espiral hiperbólica es $r=\frac{a}{\theta}$ y por supuesto que en la fórmula de la espiral logarítmica aparece esta función y su presencia en la naturaleza se muestra en los brazos de las galaxias espirales entre ellas nuestra Vía Láctea, los ciclones tropicales también tienen forma aproximada a una espiral logarítmica y la mayoría de las arañas tejen sus tela según una espiral logarítmica.

Figura 1. 22 Telaraña en forma de espiral logarítmica

Figura 1. 23 Galaxia espiral M100

Figura 1. 24 Dos ciclones tropicales sus imágenes muestran su desarrollo en espiral cercanos a una espiral logarítmica.

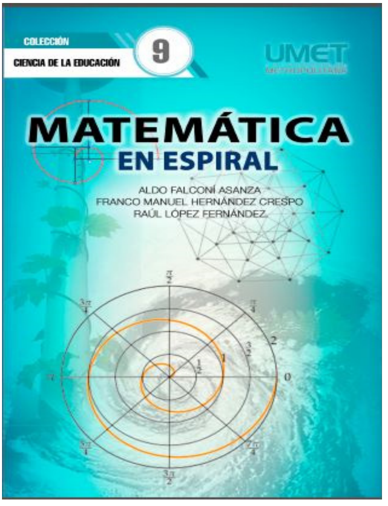
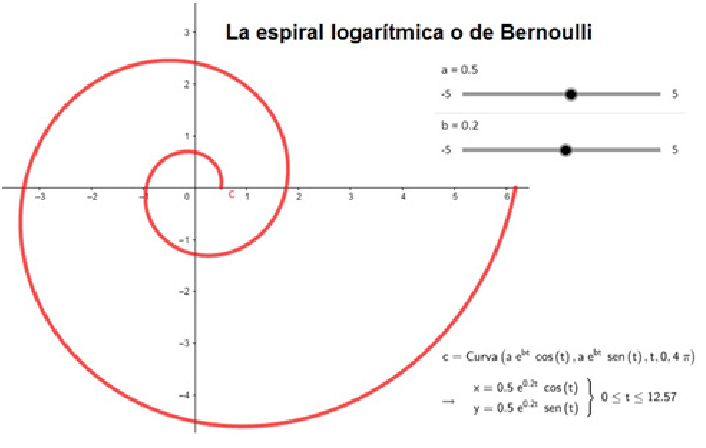


Figura 1. 25 Carátula del libro "Matemática en Espiral"

Un estudio detallado de la espiral logarítmica se presenta en el libro "Matemática en Espiral" de los autores Aldo Falconí Asanza, Franco Manuel Hernández Crespo y Raúl López Fernández y por ser el doctor López Fernández coautor también de este libro que se edita por la misma editorial que el anterior, se reproduce el texto referido a la espiral logarítmica.

La espiral logarítmica o de Bernoulli, espiral equiangular o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Fue descrita por primera vez por Descartes[i] y posteriormente investigada por Jakob Bernoulli[ii].



Como ya se presentó esta importante espiral contemos la historia con más calma; después que Durero planteó su espiral áurea pasó aproximadamente un siglo y con la aparición y el desarrollo del cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz fue posible el estudio de las curvas hasta alcanzar su momento de gloria. Y dentro de estas curvas una muy especial y al mismo tiempo muy habitual en la naturaleza: la espiral equiangular, logarítmica o geométrica.

Aunque Descartes y Torricelli habían iniciado su estudio, les faltaba la potente herramienta del cálculo para poder rematarlo. Este honor le va corresponder a Jakob Bernouilli en los albores del siglo XVIII.

René Descartes (1596-1648), un año después de la publicación de La Géométrie, se va encontrar con la curva mecánica que responde al problema planteado por Galileo sobre la trayectoria de caída de un cuerpo a través de una tierra en rotación. Esta trayectoria le llevó a Descartes hasta la espiral equiangular o logarítmica.

Su ecuación es de la forma

$$\theta = \log_b \left(\frac{r}{a}\right)$$

También puede expresarse de las formas:

$$r = a\, b^{\theta} \qquad\qquad r = a\, e^{b\theta}$$

donde a y b son constantes y e es el número e=2,71828182... , r el radio de posición de un punto y theta el ángulo girado.

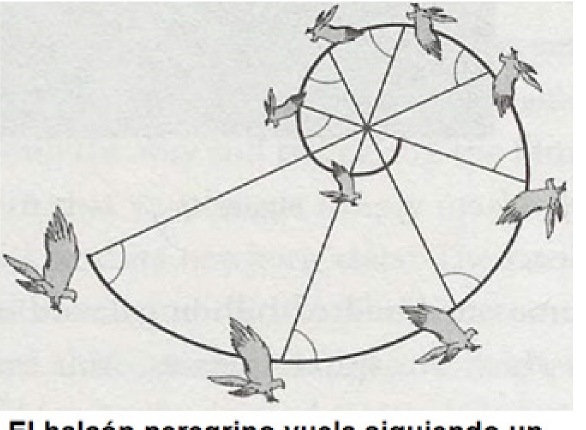
Es decir, el radio de posición en un punto no depende de forma lineal, uniformemente, del ángulo girado. Su dependencia es exponencial.

Según vayamos girando alrededor del origen la curva se va ir alejando del origen de forma cada vez más rápida. Fue Torricelli, utilizando métodos semejantes a Arquímedes, quien primero logró calcular su longitud.

Pero, sin duda, al matemático que cautivó el estudio de esta espiral fue a Jacob Bernoulli, quien la bautizó con el nombre de Spira Mirabilis (espiral maravillosa), título que dio a su obra dedicada a esta espiral, la que también escogió como emblema para su tumba con un epitafio en latín que reza: “Eadem mutata resurgo” (“Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo el mismo”); pero desgraciadamente, por una equivocación o desconocimiento del grabador, la que se grabó en su lugar fue una espiral de Arquímedes.

Lápida de la tumba de Bernoulli observe la espiral en la parte inferior.

Las cámaras de la concha de un nautilus forman una espiral aproximada a una espiral logarítmica.



El halcón peregrino vuela siguiendo un recorrido aproximado al de una espiral logarítmica

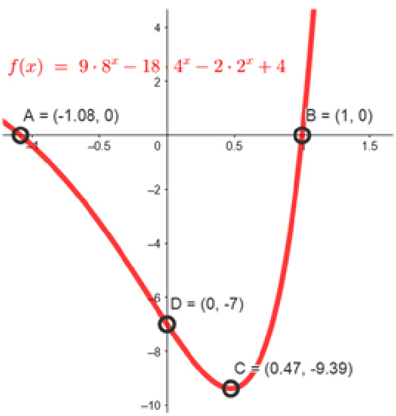
(Falconi Asanza, Hernández Crespo, & López Fernández, 2020) Pág. 166-168.

1.6. Ecuaciones exponenciales.

Se llama ecuación exponencial aquella en la cual la incógnita forma parte sólo de los exponentes para cierta base constante. Las ecuaciones exponenciales más simples son del tipo $a^{f(x)}=b$ donde $a,b \in \mathbb{R}_+$ y $a\neq 1$. Estas ecuaciones son equivalentes a ecuaciones algebraicas de la forma $f(x)=\log_a b$

Algoritmo general de solución de las ecuaciones exponenciales:

Pasos del algoritmo		**Ejemplo**
Caso 1	Si es posible, aun cuando las bases sean distintas, transformarlas a una base común aplicando propiedades de las potencias.	$9.8^x-18.4^x-2.2^x+4=0$
	a. Transformar cada una de las expresiones a la base menor.	$9.(2^x)^3-18.(2^x)^2-2(2^x)+4=0$
	b. Hacer un cambio de variables del tipo $y=a^x$	$y=2^x$ $9.y^3-18.y^2-2y+4=0$
	c. Resolver la ecuación algebraica.	En este caso las soluciones son: $y = 2;\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3};y = \frac{\sqrt{2}}{3}$
	d. Sustituir cada valor obtenido en la variable cambiada.	$2^x = 2\quad, 2^x = \frac{\sqrt{2}}{3};\quad 2^x - \frac{\sqrt{2}}{3}$
	e. Resolver las ecuaciones exponenciales obtenidas	$2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$ $2^x = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x = log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$



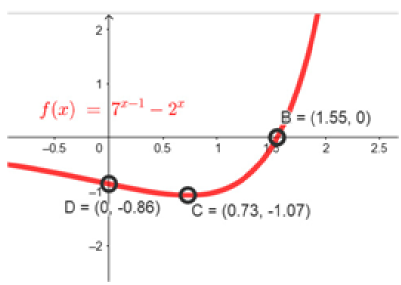


Figura 1. 26 Gráfico de las funciones correspondientes a las ecuaciones resueltas generadas con GeoGebra

Caso 2	Si no es posible, transformar la ecuación a una base común aplicando propiedades de las potencias.	$7^{x-1} - 2^x = 0$
	Existen ecuaciones como las del ejemplo con distintas bases que pueden resolverse colocando en cada miembro las expresiones exponenciales y tomando logaritmo de cualquier base (preferiblemente base 10 en ambos miembros)	$7^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow (x-1)\log 7 = x\log 2$ $x\log(7) - log7 = x\log 2$ $x(log7 - log2) = log7$ $x = \frac{log7}{(log7 - log2)} = 1.553$

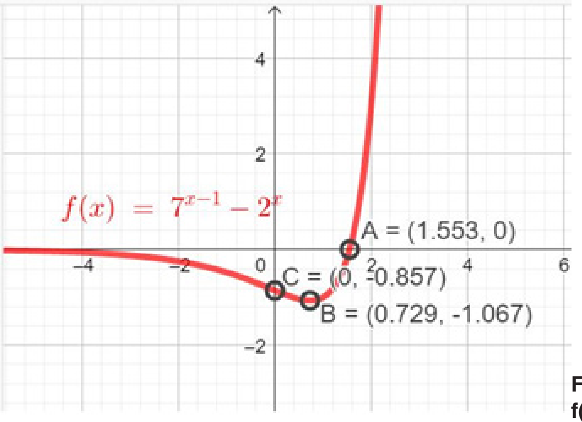


Figura 1. 27 Gráfico de la función f(x)= $7^{x-1} - 2^x$ y puntos significativos

Ejercicio 1.1. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

a) $2^{x-1} - 5.2^x + 3 = 0$

b) $2^{x-2} + 4^x - 320 = 0$

c) $3^{x^2+1} - 3^{x^2-1} = 216$

d) $9^{x-1} - 2.3^{3x-3} + 81 = 0$

e) $4^x = 8^{\frac{x}{3}} + 2$

f) $25^{x^2-\frac{1}{4}} = 5^{2x-1}$

g) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$

h) $7^x + 7^{x-1} + 7^{x+2} = 2793$

i) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 960$

j) $3^{-2x^2}.9^{-2x^2-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^{6x-2}$

k) (a) Verifique si es x=5 la solución de la ecuación

$$\mathbf{2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984}$$

l) Encuentre la solución de la siguiente ecuación $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2-x} = 2^{x^2}$

1.7. Inecuaciones exponenciales.

Son inecuación exponencial las que se pueden reducir a una de las siguientes formas $a^{f(x)} > b$ o $a^{f(x)} < b$ con $a > 0$ y $a \neq 1$

Como formas particulares para posterior generalización se tiene		
$a^x > b$		$a^x < b$
$x \in]\, log_a b \,;\, +\infty\, [$	Para $a > 1,\ b > 0$	$x \in]-\infty\,;log_a b\ [$
$x \in]-\infty\,;log_a b\ [$	Para $0 < a < 1,\ b > 0$	$x \in]\, log_a b \,;\, +\infty\, [$
$x \in \mathbb{R}$	Para $a > 0,\ b < 0$	$x = \emptyset$ (La desigualdad no tiene solución)
Para $a^{f(x)} > b$ o $a^{f(x)} < b$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ se cumplen las condiciones anteriormente analizadas pero tomando f(x) en lugar de x como se ilustra en los ejemplos-		

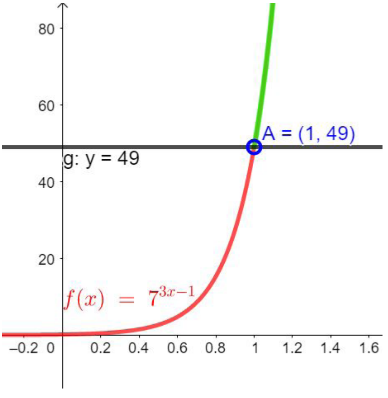


Figura 1. 28 Observe las funciones de f y g, su intersección y el segmento en verde se corresponde con la solución de la inecuación.

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación $7^{3x-1}>49$

Esta inecuación cumple con las condiciones $a > 1$, $b > 0$ por lo tanto por extensión cumple la condición

$f(x) \in]\, \log_a b\ ;+\infty\ [$ es decir, $f(x)>\log_a b$. Para el ejemplo que se analiza

$f(x)=3x-1$, por lo que la ecuación se transforma en:

$3x-1>\log_7 49 \Leftrightarrow 3x-1>2 \Leftrightarrow 3x>3 \Leftrightarrow x>1$

$S=]1; +\infty[$

En Figura 1.20 se muestra la solución de la inecuación anterior con GeoGebra.

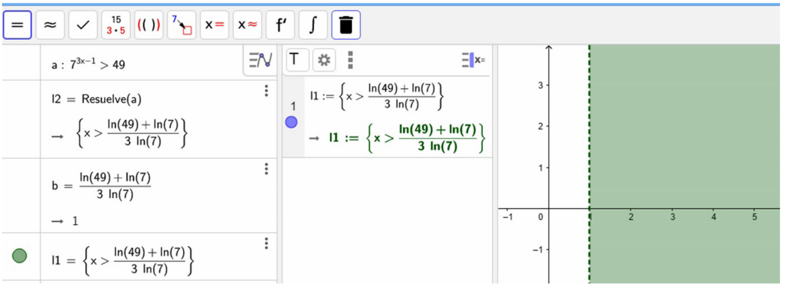


Figura 1. 29

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la inecuación

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+3} < \frac{1}{2}$$

Este inecuación cumple la condición $0<a<1, b>0$ y por la desigualdad $f(x) \in \,]\log_a b\ ;\ +\infty\,[$ es decir, $f(x) > \log_a b$ y para la inecuación que se resuelve se tiene que

$$4x+3 > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x+3 > 1 \Leftrightarrow 4x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}; \qquad S = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

En Figura 1.22 la combinación gráfica muestra la solución con GeoGebra.

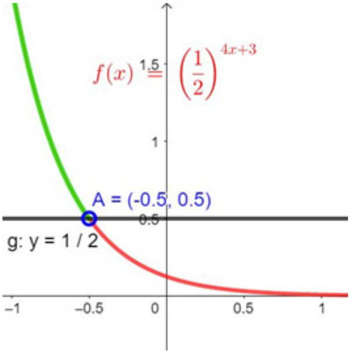


Figura 1. 30 Al igual que en 1.19 en verde se muestra el intervalo de solución

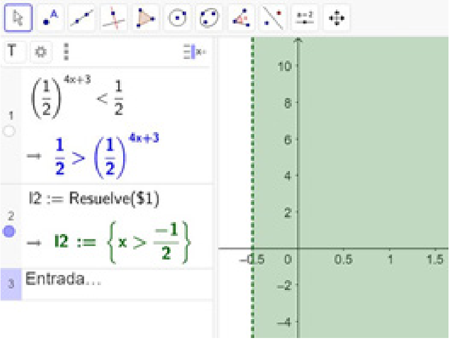


Figura 1. 31

Ejercicio 1.2. Halle la solución de las inecuaciones

a) $10.2^{x^2-4} \geq 320$

b) $\frac{11^{x^2-2}}{121} \geq 11^{x+2}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x}} \geq (0.2)^{2x}$

d) $4^x < 2^{x+1} + 3$

e) $3^{2x} < 5^{x^2-15}$

f) $0.25^{\frac{7x-4}{x+2}} \leq \frac{1}{4}$

g) En el gráfico adjunto (Figura 1.23) se representan las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{|x|}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}$ determine para qué valores de x las imágenes f(x) se encuentra por debajo y para qué valores por encima de las g(x).

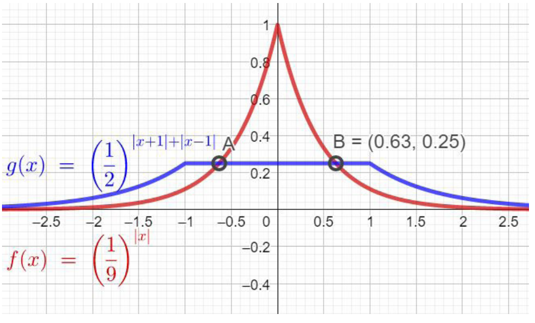


Figura 1. 32

h) Encontrar el conjunto solución de la inecuación:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$$

Como guía para constatar resultados se adjunta el gráfico de ambas funciones (Figura 1.24).

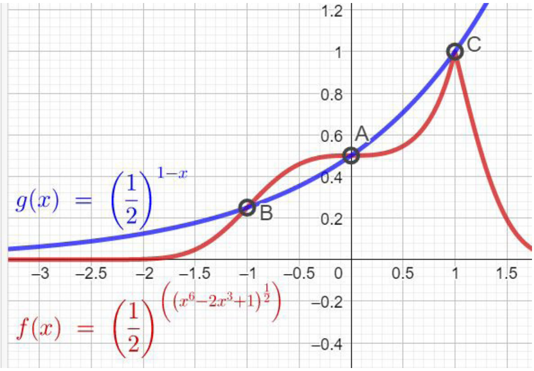


Figura 1. 33

i) Calcule el conjunto solución de la inecuación para el caso en que las bases de las funciones exponenciales sea $\sqrt{2}$ y el polinomio sea una expresión bicuadrática de cuarto grado.

j) Y si las cambia ahora por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ¿cuál es el conjunto solución?

k) Experimente con otros cambios análogos al que se propuso en (i) y (j).

1.8. Ecuaciones logarítmicas.

Se llama ecuación logarítmica, la ecuación en la cual la incógnita forma parte como argumento de la función logarítmica.

La más simple ecuación logarítmica es la que tiene la forma

$$log_a f(x) = b \; con \; a > 0 \; y \; a \neq 1; b \; \in \mathbb{R}, equivalente \; a \; f(x) = a^b$$

Algoritmo general de solución de las ecuaciones logarítmicas:

	Pasos del algoritmo	**Ejemplo**
	.	$(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$
Realizar trasformaciones “convenientes y necesarias” en las expresiones logarítmicas que aparecen en la ecuación (transformar suma en producto, realizar cambio de base, etc.)		En este primer ejemplo no se requiere hacer transforma-ciones, pero en los ejemplos posteriores se insistirá en esto

	De ser “conveniente” hacer un cambio de variables del tipo $y=log_a x$	$y=log_2 x$ $y^2+y-2=0$
	Resolver la ecuación algebraica.	En este caso las soluciones son: $y_1=1$; $y_2=-2$
	Sustituir cada valor obtenido en la variable cambiada.	$log_2 x=1$; $log_2 x=-2$
	Resolver las ecuaciones logarítmicas obtenidas	$log_2x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$ $log_2x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ $S = \left\{2, \quad \frac{1}{4}\right\}$

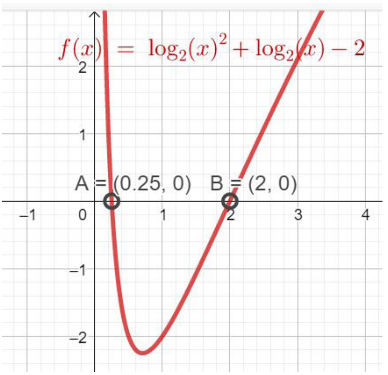


Figura 1. 34 Gráfico y solución con Geogebra de (log_2 x)^2+ log_2 x-2=0

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$2\sqrt[3]{2log_{16}^2x} - \sqrt[3]{log_2x} - 6 = 0$$

Ahora es necesario realizar trasformaciones “convenientes y necesarias” porque hay distintas bases. La fórmula $log_ac = \frac{log_bc}{log_ba}$ y en este caso lo aconsejable es reducir la base 16 a base 2; sustituyendo se tiene $log_{16}x = \frac{log_2x}{log_216} = \frac{log_2x}{4}$.

Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$2\sqrt[3]{2\left(\frac{log_2x}{4}\right)^2} - \sqrt[3]{log_2x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{\cancel{2}\frac{log_2^2x}{\cancel{16}}} - \sqrt[3]{log_2x} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{\frac{log_2^2x}{8}} - \sqrt[3]{log_2x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{log_2^2x} - \sqrt[3]{log_2x} - 6 = 0$$

También es “conveniente” un cambio de variable $y = \sqrt[3]{log_2x}$ de aquí la ecuación:

y^2-y-6=0

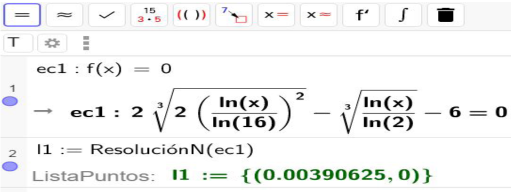


Figura 1. 35

Finalice el lector la ecuación y verifique el resultado: $x_1=2^{27}$; $x_2=2^{-8}$ ver solución con Geogebra, en Figura 1.26 con Cálculo Simbólico (CAS) y en Figura 1.27 en forma gráfica.

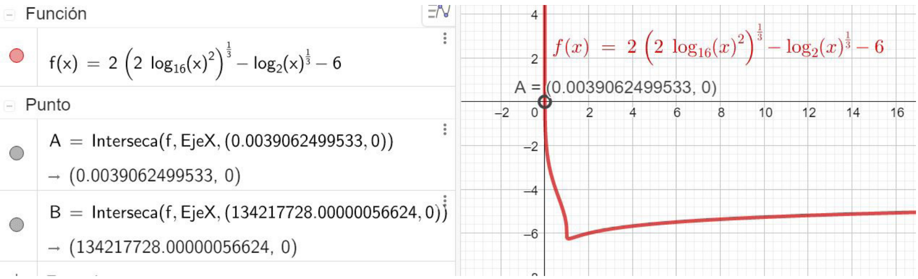


Figura 1. 36 Observe los números exageradamente grande y exageradamente pequeño

Hallar el conjunto solución de la ecuación: $\log_3(2x-1)-\log_3(x-1)=1$

Nuevamente es "conveniente" hacer transformaciones aplicando las propiedades dadas de las leyes de las operaciones con logaritmos:

$log_3\frac{2x-1}{x-1}=1$ aquí no se requiere hacer cambio de variable, de la igualdad se infiere que: $\frac{2x-1}{x-1}=3^1$ aplicando la equivalencia entre expresiones exponeciales y logarítmicas.

Continuando el desarrollo de la ecuación: siendo $x\neq 1, 2x-1=3(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-3x=-3+1 \Leftrightarrow x=2$

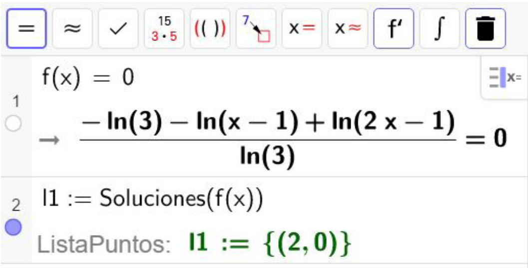


Figura 1. 37 Solución mediante GeoGebra con cálculo simbólico, observe la trans-formación de la ecuación en función de logaritmo neperiano

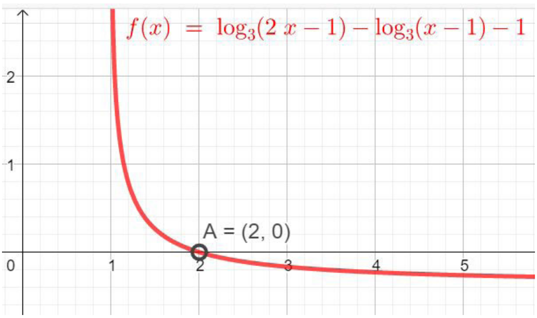


Figura 1. 38 Gráfico y solución con GeoGebra de $\log_3(2x-1)-\log_3(x-1)=1$

Ejercicios 1.3. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\log x - \log 36 = 3$

b) $log(\sqrt{x}) - log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

c) $log(\sqrt{3x+10}) - log(\sqrt{x+2}) = 1 - \log 5$

d) $log(3x+1) - log(2x-3) = 1 - \log 5$

e) $log(2x+1)^2 + log(3x-4)^2 = 2$

f) $\frac{log(16-x^2)}{log(3x-4)} = 2$

g) $(x^2-5x+9)\log(2) + \log(125) = 3$

h) $2\log(x) - \log(32) = log\left(\frac{x}{2}\right)$

i) $\log\left(2^{(2-x)}\right)^{(2+x)} + \log(1250) = 4$

j) $5log\left(\frac{x}{2}\right) + 2log\left(\frac{x}{3}\right) = 3log(x) - log\left(\frac{32}{9}\right)$

k) $\frac{\log(2)+log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$

1.9. Inecuaciones logarítmicas.

Son inecuaciones logarítmicas las que se pueden reducir a una de las siguientes formas $\log_a f(x)>b$ o $\log_a f(x)<b$ con $a>0$ y $a\neq 1$

Las inecuaciones se descomponen en sistemas de inecuaciones del siguiente modo:

	a>1	0>a<1
$\log_a f(x)>b$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)>a^b \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<a^b \end{cases}$
$\log_a f(x)<b$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<a^b \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)>a^b \end{cases}$

Algoritmo general de solución de las inecuaciones logarítmicas:

	Pasos del algoritmo	Ejemplo
	.	$log_4^2\, x - \ log_2 x - 15 > 0$
f) Realizar trasformaciones “convenientes y necesarias” en las expresiones logarítmicas que aparecen en la ecuación (particularmente realizar cambio de base, etc.)		$\left(\frac{log_2 x}{log_2 4}\right)^2 - \ log_2 x - 15 > 0$ $\frac{1}{4} log_2^2\, x - \ log_2 x - 15 > 0$
	g) De ser “conveniente” hacer un cambio de variables del tipo $y=\log_a x$	$y = log_2 x$ $\frac{1}{4}y^2 - y - 15 > 0$
	h) Resolver la ecuación algebraica.	En este caso las soluciones son: $y>10$ o $y<-6$
	i) Sustituir cada valor obtenido en la variable cambiada.	$\log_2 x>10$ o $\log_2 x<-6$

	j) Resolver las ecuaciones logarítmicas obtenidas	$\log_2 x>10 \Leftrightarrow x>2^{10}$ o $\log_2 x<-6 \Leftrightarrow x<2^{-6}$ $S=\{x\epsilon\mathbb{R}:x\epsilon]0,2^{-6}[\cup]2^{10},+\infty[\}$

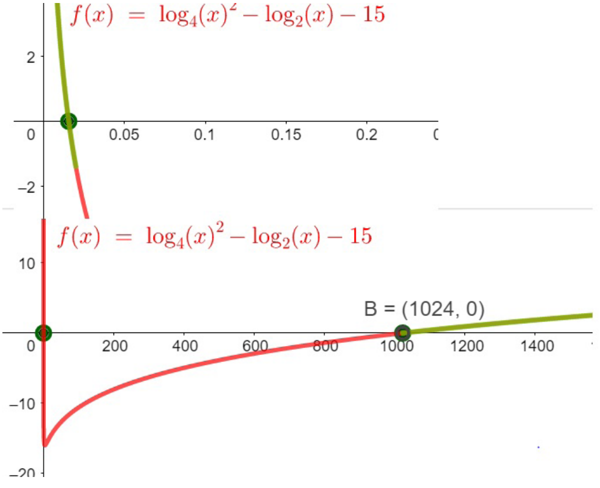


Figura 1. 39

En Figura 1.30 se ha representado la solución de la inecuación en dos gráficos, el superior puntos “cercanos” a 2^{-6} y en el inferior “cercanos” a 2^{10}.

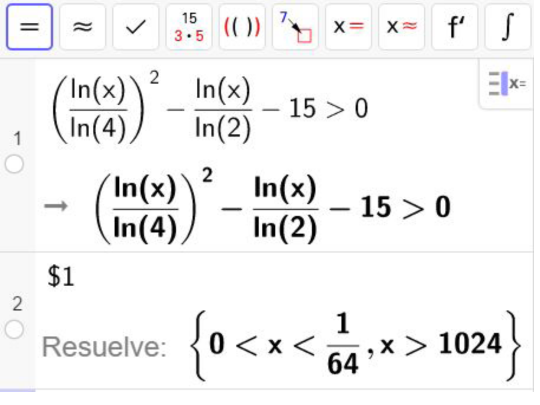


Figura 1. 40 Solución con Cálculo Simbólico

Una generalización de las inecuaciones logarítmicas estudiadas en cuando se tiene una inecuación del tipo $\log_{g(x)}f(x)>c$ ó $\log_{g(x)} f(x)<c$ con las siguientes condiciones:

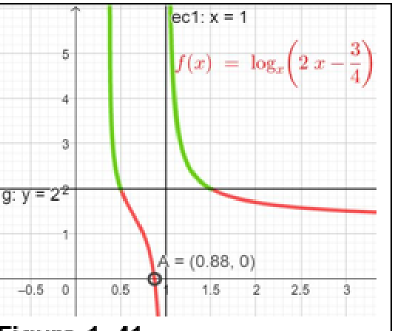
f(x) y g(x) *dos polinomios*, $c\epsilon\mathbb{R}, f(x)>0, g(x)>0, g(x)\neq 1$

Las inecuaciones se descomponen en sistemas de inecuaciones del siguiente modo:

Las inecuaciones se descomponen en sistemas de inecuaciones del siguiente modo:		
	g(x)>1	0>f(x)<1
$\log_{g(x)} f(x)>c$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)>(g(x))^c \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<(g(x))^c \end{cases}$
complete la tabla para $\log_{g(x)} f(x)<c$		

Hallar el conjunto solución de $log_x\left(2x-\frac{3}{4}\right)>2$

Siguiendo el algoritmo planteado se tiene:

$\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{4}>0 \\ x>1 \\ 2x-\dfrac{3}{4}>x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{4}>0 \\ 0<x<1 \\ 2x-\dfrac{3}{4}<x^2 \end{cases}$	 **Figura 1. 41**

$2x-\frac{3}{4}>0$ $2x>\frac{3}{4}$ $x>\frac{3}{8}$	$2x-\frac{3}{4}>x^2$ $-x^2+2x-\frac{3}{4}>0$ $x^2-2x+\frac{3}{4}<0$ $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$	$2x-\frac{3}{4}<x^2$ $-x^2+2x-\frac{3}{4}<0$ $x^2-2x+\frac{3}{4}>0$ $x<\frac{1}{2}\;\; o \;\; x>\frac{3}{2}$
$\frac{3}{8}<x<\frac{1}{2}$	$1<x<\frac{3}{2}$	
$\frac{3}{8}<x<\frac{1}{2}\;\; o \;\; 1<x<\frac{3}{2} S=\{x\epsilon\mathbb{R}: x\epsilon]\frac{3}{8},\frac{1}{2}[\cup]1,\frac{3}{2}[\}$ Justifique este resultado		

En Figura 1.33 está la solución con CAS del GeoGebra y la correspondiente representación gráfica.

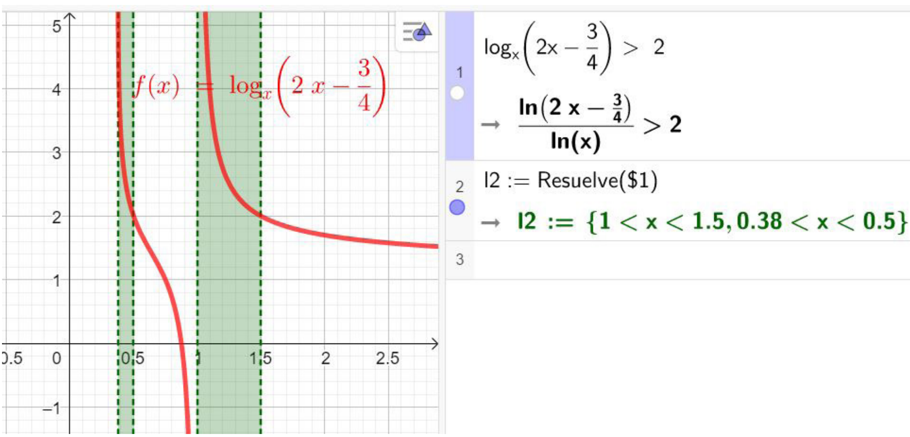


Figura 1. 42

1.4. Ejercicios del epígrafe

a) Halla todas las abscisas no negativas que hacen que los puntos de la curva f(x) se encuentren, en el gráfico, por encima de los de g(x).

$$f(x) = log_4 \frac{x^3 - 19x - 30}{x^2 - 4} \quad g(x) = (x+2)^2 - x^2 - 4x - 3$$

b) ¿Cuáles son los números reales que satisfacen la desigualdad $\log_2 (2-\log_4 x) \leq 2$?

c) Existe un único intervalo de números reales que satisface: $\frac{1}{log_2 x} - \frac{1}{log_2(x-1)} > 1$ Halla dicho intervalo.

d) Para cuáles x reales con x < 2 se cumple que $\frac{2x^2+x-6}{x^2+x} \leq 10^{1-log2}$

Resuelve las siguientes desigualdades:

e) $\log_5 (2x+5) > \log_5 (16-x^2)-1$

f) $\log_{(x2+1)} (7x^2-3) < 2$

g) $log_{\frac{1}{2}} x + log_3 x > 1$

h) $\log_3 (x^2-5x+6) < 0$

i) $\frac{1}{log_2 x} - \frac{1}{log_2(x-1)} < 1$

j) $log_x \frac{4x+5}{6-5x} < 1$

k) (Resolver la inecuación $x^{log_a x+1} > a^2 x$

1.10. Ecuaciones con composición de funciones.

Dadas dos funciones f y g , la función compuesta $f \circ g$ (también conocida como composición de f y g) está definido por:$(f \circ g)(x)=f(g(x))$.

En el esquema adjunto se ilustra la composición de dos funciones. Sea el siguiente ejemplo:

f(x)=x^2-3x+2

g(x)=3^x

$f(g(x))=(3^x)^2-3(3^x)+2$

$f(g(x))=(3^{2x})-(3^{x+1})+2$

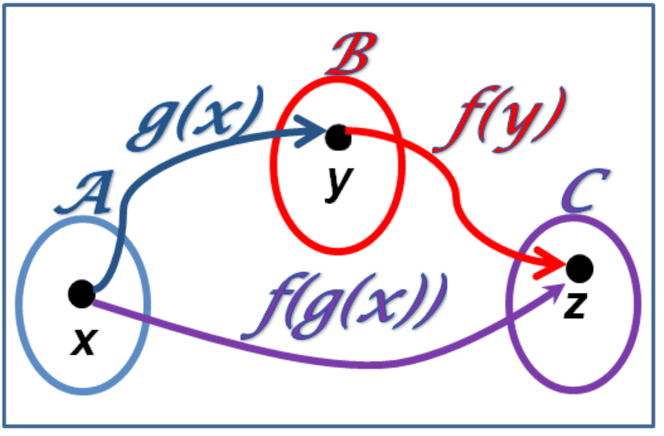


Figura 1. 43

El gráfico de Figura 1.35 muestra las funciones f y g y la composición f(g(x))

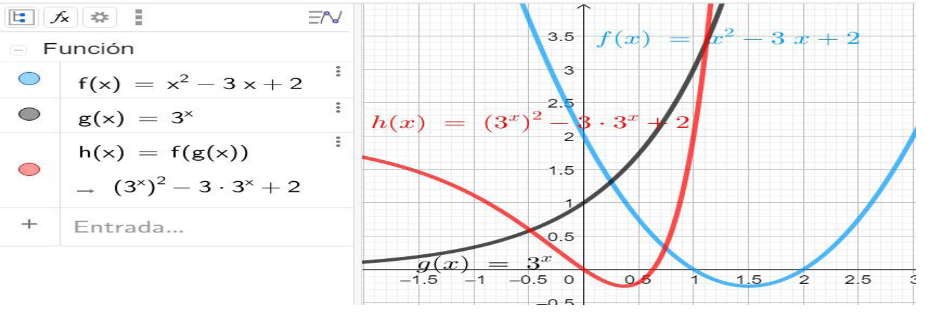


Figura 1. 44 h(x)=f(g(x))

Si se conmutan las funciones y se calcula g(f(x)), se obtiene el gráfico de la Figura 1.36 con lo que se constata que evidentemente, en general f(g(x))≠g(f(x)).

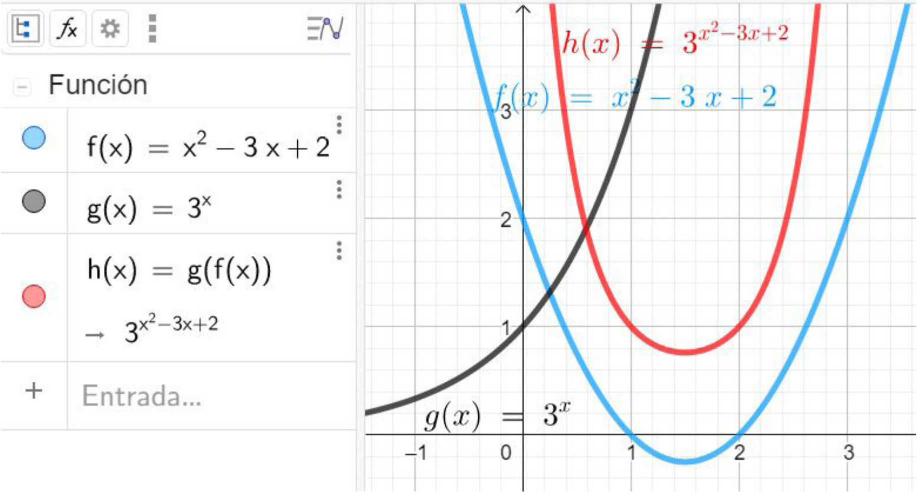


Figura 1. 45 h(x)=g(f(x))

Procedimiento para resolver ecuaciones formadas por una composición de funciones.

En realidad, no hay un procedimiento único para este tipo de ecuaciones, generalmente el cambio de variables se adapta a muchos de ellos o los métodos de solución indicados para determinado tipo de ecuación, ejemplo, la ecuación que se puede formar de la composición de funciones anteriores es una típica ecuación exponencial, pero hay otros casos como los siguientes:

Ejemplos:

i) Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{log_2\left(\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right)}=1$$

Se pueden dar los siguientes pasos:

a) Determinar o hacer un esbozo del dominio de la función que aparece en la ecuación, particularmente de sus valores inadmisible.

b) Identificar las funciones que están presente por las distintas partes de las expresiones que conforman la ecuación, en este caso se tiene:

a. Una expresión irracional. (Llamémosla I)

b. Una expresión logarítmica.(L)

c. Una expresión racional (R)

c) Puede resultar ilustrativo utilizar una notación auxiliar para caracterizar la ecuación, en este caso puede expresarse de la forma I(L(R)).

d) Al dar inicio a la resolución de la ecuación lo indicado es comenzar por el tipo de expresiones exteriores aplicando a estas el método de resolución indicado. Para el caso se comenzaría por:

a. La expresión irracional, para lo que se emplea como método estándar la racionalización, o sea, elevar ambos miembros de la ecuación a la potencia que indique el radical.

b. Posteriormente se procede con la logaritmación en cuya solución se emplea o un cambio de variable o la aplicación del concepto de logaritmo transformándola en una exponencial

c. Finalmente se debe tener una ecuación racional, que requiere la eliminación de los denominadores para obtener un polinomio.

d. Resolver la ecuación polinómica y comprobar los resultados

Este es plan de solución puede tener cambios durante el proceso de cálculo, pero es preferible modificar un plan que enfrentase a resolver un problema sin tenerlo.

e) Ejecutar el plan:

a. Para el caso lo más significativo del dominio es que por anular el número $\frac{11}{4}$ al denominador de la expresión racional, este valor no puede formar parte de la solución.

b. Elevando al cuadrado se tiene:

$$log_2\left(log_2\left(\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right)\right)=1$$

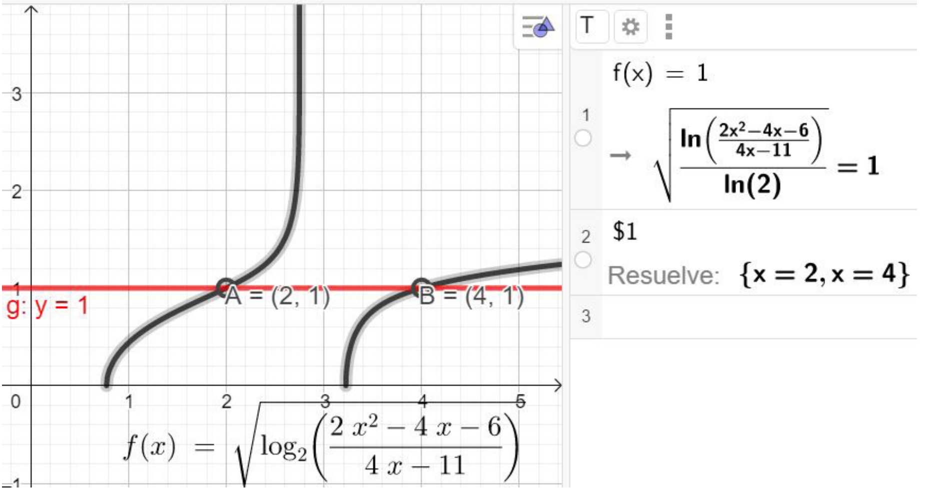
c. Al transformar la expresión logarítmica se obtiene:

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}=2^1$$

d. Resolviendo la ecuación racional se llega al siguiente resultado:

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}=2 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=2(4x-11)\ con\ x\neq\frac{11}{4}$$

$$2x^2-12x+16=0 \Leftrightarrow x=2\ o\ x=4 \quad S=\{2,4\}$$



ii. Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$1=\sqrt{1-\sqrt{4^{x+1}-7\cdot 16^x}+2^x}$$

Un análisis de esta ecuación puede llevar a que en la misma parecen:

a) Expresiones irracionales (I)

b) Expresiones exponenciales (E)

Por lo que pudiera expresarse en la seudonotación que se ha empleado que es del tipo I(E), por lo que se tendría que comenzar según lo expresado por racionalizar la expresión elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, pero es evidente que el proceso de elevar al cuadrado con expresiones exponenciales es complejo, por lo que es conveniente en este caso un típico cambio de variables $y=2^x$ quedando la ecuación de la siguiente forma $1 = \sqrt{1-\sqrt{4y^2-7y^4}+y}$.

Tras la racionalización y simplificación se llega a la ecuación

$8y^4-4y^3=0$.

Factorizando se obtiene $y^3=0$ o $y=\frac{1}{2}$. Evidentemente la primera solución es imposible y de la segunda se obtiene la respuesta del ejercicio x= -1, la que debe comprobarse en la ecuación original.

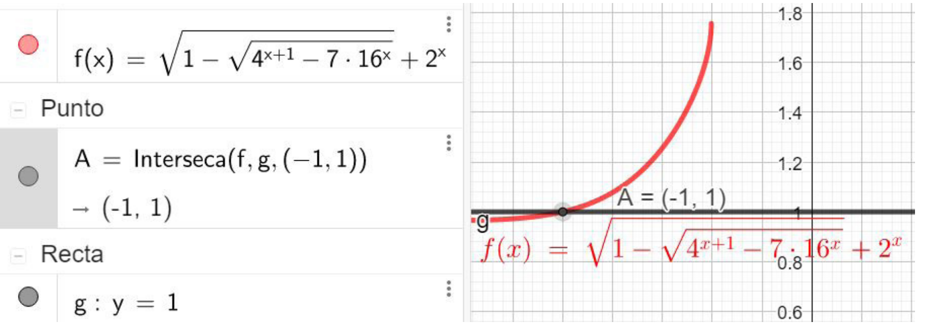


Figura 1. 47

Ejercicio 1.5. En la solución de la ecuación anterior se omitieron cálculo que el lector debe hacer, como parte del aprendizaje y ante la posibilidad de errores del autor que escribe este libro, recuerde el primer principio del método de Descartes: "…no recibir como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal, evitando cuidadosamente la precipitación y los prejuicios, y no aceptando como cierto sino lo presente a mi espíritu de manera tan clara y distinta que acerca de su certeza no pudiera caber la menor duda".

Por esta misma razón debe comprobar en la ecuación original si la solución encontrada lo es de la ecuación original.

iii. Hallar la solución de la siguiente ecuación: $\log_x (2x^{x-2}-1) + \log_x x^4 - 2x = 0$

Tres tipos de expresiones:

a) Logarítmicas (L).

b) Exponenciales (E).

c) Polinómicas (P)

La notación para clasificarla sería L(E(P)) y comenzando por la más exterior, la expresión logarítmica, que tiene la particularidad de tener la incógnita como base de la expresión.

Aplicando propiedades de los logaritmos la ecuación se transforma en:

$\log_x (2x^{x-2}-1)\, x^4 = 2x$; de aquí aplicando el concepto de logaritmo se obtiene: $(2x^{x-2}-1)\, x^4 = x^{2x}$. Esta última es una ecuación exponencial, (segundo nivel), que para resolverla el agrupamiento conveniente (o cambio de variable si lo prefiere) debe hacerse alrededor de x^x, lo que permite transformar la ecuación en

$(x^x)^2 - 2x^x x^2 + x^4 = 0$, expresión que tiene la forma de un trinomio cuadrado perfecto que se descompone de la siguiente forma:

$(x^x - x^2)^2 = 0 \Longrightarrow x^x - x^2 = 0 \Longrightarrow x^x = x^2 \Longrightarrow x = 2$

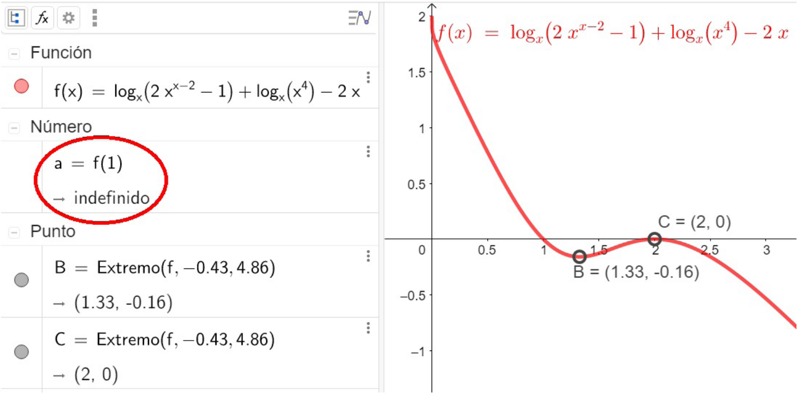


Figura 1. 48

Si se observa el gráfico de la Figura 1.39, al parecer la curva corta al eje de abscisas en x=1 y por tanto allí habría un cero “que no se calculó” pero para constatar si es un error al graficar se calculó f(1) y la respuesta está dentro del círculo rojo “indefinido”, esto puede constatarlo el lector evaluando manualmente la función; realmente en x=1 la función “tiene un hueco”; hay un salto de discontinuidad. Estas son las sorpresas que nos tiene reservadas las funciones y que las tecnologías las revelan, pero es necesaria la teoría para “verlas y disfrutarlas”.

Otra curiosidad vamos a revelarla con el siguiente gráfico, pero antes detengámonos en una de las transformaciones realizadas donde textualmente se dijo:

“Aplicando propiedades de los logaritmos la ecuación se transforma en:

$\log_x (2x^{x-2}-1)\ x^4=2x$; de aquí aplicando el concepto de logaritmo se obtiene: $(2x^{x-2})-1)\ x^4=x^{2x}$”. , es decir se encontró la siguiente relación:

$\log_x (2x^{x-2}-1)\ x^4=2x \Longrightarrow (2x^{x-2}-1)\ x^4=x^{2x}$

Ahora bien, en ningún momento se puede pensar que ambas funciones son iguales, lo que sucede es que la nueva expresión es equivalente a la anterior, en el sentido de que la nueva ecuación TIENE LOS CERO DE LA ORIGGGINAL y con ella se reduce el problema a un problema ya resuelto, que es el cálculo de raíces con ecuaciones exponenciales.

También en la solución dada se expresó que:

$(x^x-x^2)^2=0 \Longrightarrow x^x-x^2=0 \Longrightarrow x^x=x^2 \Longrightarrow x=2$

Pero aquí falta una solución x=1 observe que de $x^x=x^2$ se tiene $1^1=1^2$

Esto implica que $(2x^{x-2}-1)\ x^4=x^{2x}$ es continua en x=1 por tanto para una respuesta completa se hace necesario probar si las soluciones x=2 y x=1 son soluciones de la ecuación original $\log_x (2x^{x-2}-1)\ x^4=2x$ con lo que se comprobaría que es necesario desechar la solución x=1.

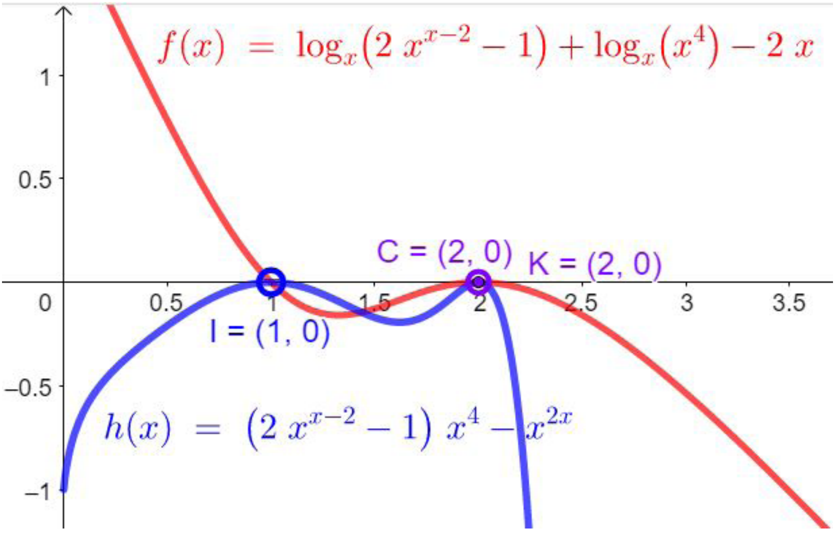


Figura 1. 49

Con los gráficos de Figura 1.40 se esclarece lo explicado: la curva

$h(x)=(2x^{x-2}-1)\,x^4-x^{2x}$ "en azul" tiene dos ceros en x=1 y x=2 mientras que $f(x)=\log_x(2x^{x-2}-1)\,x^4-2x$ tiene una sola x=2; por lo que ambas tienen un cero común; por eso el procedimiento matemático consiste en transformar la ecuación original en una equivalente cuya solución es más fácil, encontrar en esta ecuación todas las soluciones y después comprobar las que satisfacen a la primera, rechazando las que no cumplen esa condición.

Ejercicio 1.6. Miscelánea de ecuaciones e inecuaciones

a) $2^{\log x}.2^{\log(2x+7)}) = 4^{\log(x+2)}$

b) $9^{\left(\frac{1}{2}+log_9\sqrt{x+4}\right)} - 3^{\left(log_3\sqrt{x+1}\right)} = 5$

c) $log\left(1+\sqrt{x+1}\right) = 3\log\sqrt[3]{x-4}$

d) Halla los valores de x tales que $f(x) = \sqrt{\frac{10-f(x)}{3}}$ siendo.f(x)=3x-4

e) Resuelve la ecuación: $log_{3x}(16x^2+13x-2) - log_7 49 = 0$

f) Sean las funciones: $f(x) = 4^{log\sqrt{2x^2+7x}-log\sqrt{x}}$ y $g(x) = 16^{log\sqrt{x+2}}$. Determina los valores de x para los cuales ambas funciones alcanzan el mismo valor.

g) Resuelve la ecuación: $\sqrt{\sqrt{4^{x+16}}} = 1$

h) Resuelve la siguiente inecuación:

$log_3\left|5^{(x-3)^2}\right| \geq log_3 5^{2x-7} + log_3 5^{x+2}$

i)Sean f y g dos funciones reales dadas por las ecuaciones

$f(t) = \sqrt{t-2} + 10^{\log(t+3)}$ $y(t) = \sqrt{(t-1)^2 - 21} + t + 3$

a. Halla el dominio de la función f.

b. Determina para qué valores de t se cumple que f(t) = g(t)

j) Sea la función real definida para todos los valores reales de t por la ecuación: $f(t) = 2^t$ .Verifica que se cumple: $\dfrac{f(\log_2 50)}{\log_2 160 - \log_2 5} = \dfrac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^{-2}}$

Determina para qué valores de t se cumple: $2f\left(\sqrt{3}t - 2\right) = 2^{2t}$

k) Dadas las funciones $f(x) = \log_2(x-3)$ y $g(x) = \log_{0,5}\dfrac{x}{4}$

i. Calcula $f(32\sqrt{2}+3)$.

ii. Halla los valores de x para los cuales las imágenes de la función f son menores o iguales que las imágenes de la función g.

l) Sean las funciones reales f y g dadas por las ecuaciones:

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x-15}{x+5} + 3}$ y $g(x) = \log_3(x - \sqrt{x-1})$

a. determina el dominio de f.

b. Halla los valores de x para los cuales se cumple que g(x) = 1.

m) Seafunafunciónrealdefinidaporlaecuación: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-x+7} + 2^{log_2\left(\frac{1}{5}x+1\right)}$

a) Determina el dominio de la función f.

b) ¿Será posible calcular f(1)?. Justifica tu respuesta.

c) Calcula f(a) si $a=\frac{1}{2}log_3 100+log_3 24{,}3$

n) Se tiene la expresión $A(x)=\frac{x-4}{x+5}$.

a) Resuelve la ecuación $4^{A(x)}=16^x$ (x ∈ R).

b) Determina para qué valores reales de la variable x se cumple que

o) Resolver las ecuaciones

a) $\log(x^2)-2\log(x-1)+1=2\log x$

b) $2\log(x-1)+1=\log(x^2-1)$

c) $\log(x+1)-2\log(x-1)=1$

d) $\log(10(x^3+2x))-2\log(x+1)=1+\log x$

e) $\log(32+x^2)-2\log(4-x)=0$

f) $2\log x-\log(x-16)=2$

g) $\log x^2-\log\frac{10x+11}{10}=2$

h) $5\log\frac{x}{2}+2\log\frac{x}{3}=3\log x-\log\frac{32}{9}$

i) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\sqrt{log\left(1+\sqrt{x+1}\right)-3\log\sqrt[3]{x-4}}$

b. $g(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{4^{x+16}}-1}}$

c. $h(x)=\frac{1}{\sqrt{2^{\log x}.2^{\log(2x+7)}-4^{\log(x+2)}}}$

1.11. Sistemas de ecuaciones exponenciales.

Un sistema de ecuaciones que contenga ecuaciones exponenciales es llamado sistema de ecuaciones exponenciales.

El método de solución no difiere de los ya explicado y consiste en aplicar las propiedades estudiadas de las ecuaciones exponenciales para obtener ecuaciones más simples y transformar el sistema original en uno equivalente de más fácil solución.

Sea el sistema $\begin{cases} 3^x = \frac{243}{3^y} \ (I) \\ 2^x = 2^y (II) \end{cases}$

Transformando (I) en expresiones de potencias de 3:	$3^x = \frac{243}{3^y} \Leftrightarrow 3^x = \frac{3^5}{3^y} \Leftrightarrow 3^x = 3^{5-y}$
Transformando el sistema original	$\begin{cases} x = 5 - y \\ x = y \end{cases}$
La solución de este sistema es evidente y queda como tares al alumno	

Ejemplo:

Resolver el sistema $\begin{cases} 2^{2x+1} - 10 \cdot 5^{y-1} = 22 \text{ (I)} \\ 4 \cdot 2^{x-2} + 5^{y+1} = 29 \text{ (II)} \end{cases}$

Transformando las ecuaciones:	Dividiendo (I) por 2: $2^{2x}-5^y=11$ La (II) queda: $2^x+5^{y+1}=29$
El sistema queda entonces de la siguiente forma	$\begin{cases} 2^{2x} - 5^y = 11 \\ 2^x + 5^{y+1} = 29 \end{cases}$
Una opción es despejar en la ecuación más sencilla y sustituir en la otra ecuación para tener una ecuación en 2^x.	$5^y=2^{2x}-11$ $2^x+5(2^{2x}-11)=29$ $5(2^x)^2+2^x+84=0$
Resolviendo la ecuación cuadrática resultante se tiene:	$2^x=-\frac{21}{5}$ Se rechaza solución ¿Por qué? $2^x=4 \Leftrightarrow x=4$ Sustituyendo $5^y=5 \Leftrightarrow x=1$ S{(2;1)}

El gráfico de las funciones Figura 1.41 corrobora el resultado

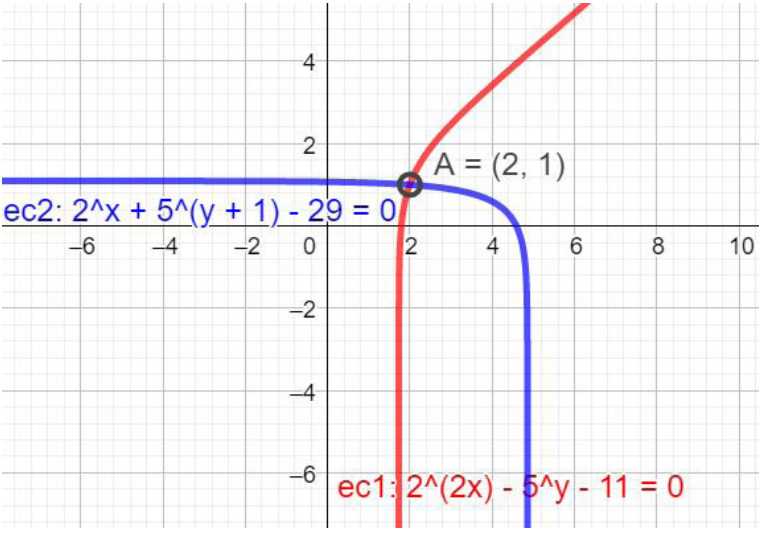


Figura 1. 50

Ejercicios 1.7. Resolver los si-guientes sistemas de ecuaciones exponenciales

a) $\begin{cases} 2^y = 2^x \\ \frac{243}{3^y} = 3^x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5^{xy} - \frac{10}{5^{xy}} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^y = 10 - 2^x \\ 2^x \cdot 2^y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = \frac{21}{\sqrt[x]{27}} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4 \cdot 2^{x-2} + 5^{y+1} = 29 \\ 2^{2x+1} - 10 \cdot 5^{y-1} = 22 \end{cases}$

Halle el conjunto solución de los si-guientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \sqrt[x]{x + y} - 6 = 0 \\ x + y = \frac{5832}{3^x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+2} = 7 + 3^{y-1} \\ 2^{x-1} = 245 - 3^{y+2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+y}{z+1} = 1 \\ 2^{2x+z} = 2^{11-y} \\ \sqrt{x + y + z} = 3 \end{cases}$

1.12. Sistemas de ecuaciones logarítmicos.

Un sistema de ecuaciones que contenga ecuaciones logarítmicas es llamado sistema de ecuaciones logarítmicas.

El método de solución, aunque no difiere de los ya explicado, tiene la particularidad de que además de requerir la aplicación de las propiedades fundamentales de los logaritmos, en ocasiones se requiere de artificios para transformar la expresión del sistema original en una expresión equivalentes. Otro aspecto que hay que tener presente en el dominio de las funciones que intervienen en el sistema para desechar las soluciones que no se incluyan en ellos.

No resulta ocioso recordar las propiedades más utilizadas de los logaritmos:

I. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N \;\; (M > 0,\; N > 0)$

II. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \;\; (M > 0,\; N > 0)$

III. $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N \;\; (\; N > 0,\; \alpha \in \mathbb{R})$

IV. $\log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N \log_a N \;\; (\; N > 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0)$

IV a. $\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\beta} \log_a N(\; N > 0, \beta \neq 0)$

IV b. $\log_{a^\alpha} N^\alpha = \log_a N(\; N > 0, \alpha \neq 0)$

V. $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \;\; (\, N > 0)$

VI. $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

VII. $a^{\log_a N}$=N

Ejemplos:

i. Resolver el sistema $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

Transformando las ecuaciones:	$2\log x - 3\log y = 7 \Leftrightarrow \log x^2 - \log y^3 = 7$ $\log \frac{x^2}{y^2} = 7$ Por propiedades (II) y (III) $\log x + \log y = 1 \Leftrightarrow \log xy = 1$ Por (I)

El sistema queda entonces de la siguiente forma, transformado en una sistema cuadrático	$\begin{cases} \log \frac{x^2}{y^2} = 7 \\ \log xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} = 10^7 \\ xy = 10 \end{cases}$
Ejercicios 1.8. La solución puede encontrarla el lector.	$\{\{x \to 100, y \to \frac{1}{10}\}\}$

Otra variante de solución.

Haciendo cambio de variables:	*u=log x; v=log y*
El sistema queda entonces de la siguiente forma, transformado en una sistema cuadrático	$\begin{cases} 2u - 3v = 7 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5u = 10 \Leftrightarrow u = 2$ $v = -1$
Sustituyendo en el cambio de variable se llega a la solución	$\{\{x \to 100, y \to \frac{1}{10}\}\}$

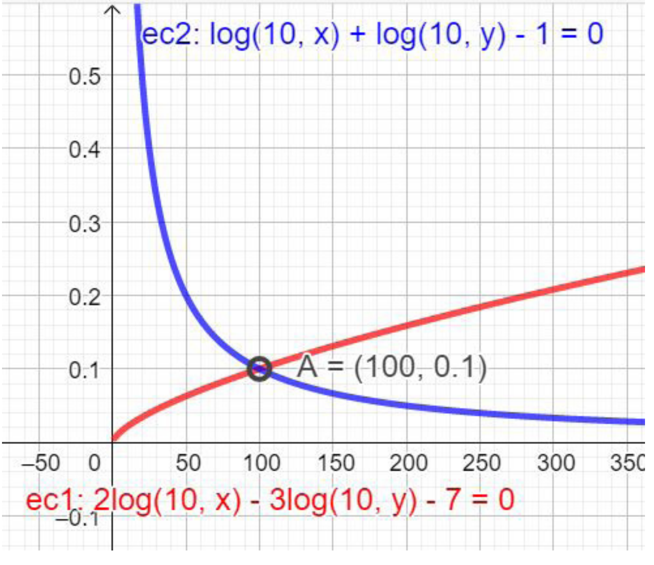


Figura 1. 51

ii. Resolver el sistema $\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Transformando las ecuaciones:	$\log_x(y-18) = 2 \Leftrightarrow y - 18 = x^2$ $\log_y(x+3) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 3 = \sqrt{y}$
El sistema queda entonces de la siguiente forma, transformado en una sistema cuadrático	$\begin{cases} y - 18 = x^2 \\ x + 3 = \sqrt{y} \end{cases}$
Despejando en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene:	$y = x^2 + 18$ $x + 3 = \sqrt{x^2 + 18}$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 18$ $6x = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ $y = \dfrac{9}{4} + 18 = 20\dfrac{1}{4}$

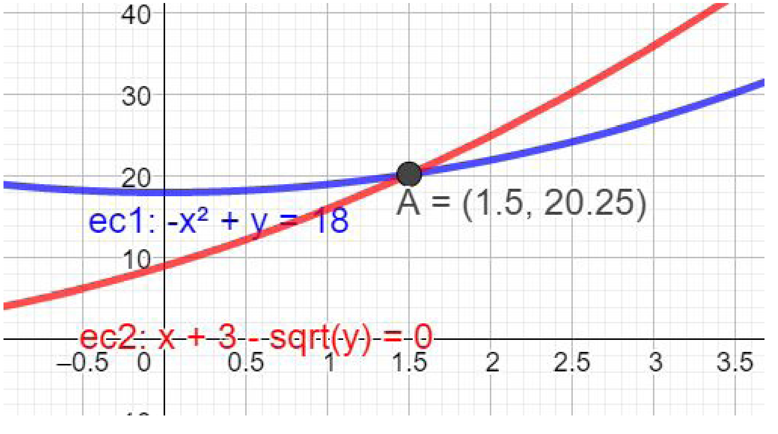


Figura 1. 52

Ejercicios 1.9. Resolver los si-guientes sistemas de ecuaciones logarítmicas

a) $\begin{cases} x+y=22 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\log x-3\log y=5 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{x+1}=128 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(x^2 y)=2 \\ \log x=\log y^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \ln x+\ln y=4 \\ \ln x-\ln y=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log_x(2-y)=2 \\ \log_x(5x+2y)=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log x+\log y=\log 35 \\ \log(x+1)-\log y=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^{2x}\cdot 3^{-y}=81 \\ \log x+\log(y+12)=1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 33 \\ \log x^2-\log y^2=3 \end{cases}$

Halle el conjunto solución de los si-guientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \log(x^2+y^2)-1=\log 13 \\ \log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_a x+\log_a y+\log_a 4=2+\log_a 9 \\ x+y-5a=0 \end{cases}$

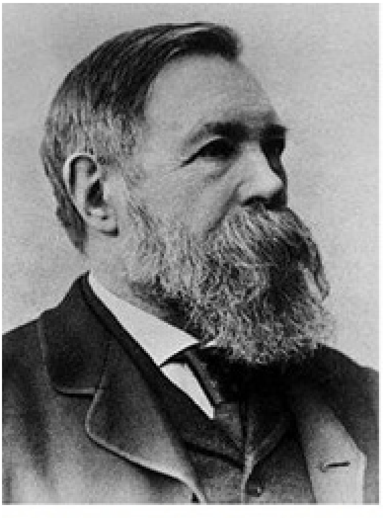
c) $\begin{cases} \log_a x+\log_{a^2} y=\frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x+\log_b y=\frac{3}{2} \end{cases}$

CAPÍTULO II.
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Una vez que la geometría sintética ha agotado las cualidades de un triángulo, considerado de por sí, y ya no tiene nada nuevo que decir acerca de él, se abre un nuevo horizonte a través de un método muy simple y absolutamente dialéctico. El triángulo, ahora, no es considerado ya en y de por sí, sino en relación con otra figura, en relación con el círculo.

Federico Engels

Dialéctica de la Naturaleza



Fiedrich Engels (1820-1895)

Figura 2.1

2.1. Introducción

De la geometría plana hemos aprendido que:

1. Si un círculo como el de la figura 2.2 se divide en 360 ángulos centrales (α) iguales, cada uno es la unidad para la medida de ángulos en el sistema sexagesimal (de base 60). Por lo tanto, a la circunferencia entera corresponde un arco de 360 grados (360°). Un grado (1°) = 60 minutos (60') = 3 600 segundos (3 600"). Según este sistema de medidas, la amplitud de un ángulo que da una vuelta completa le corresponden 360°, al ángulo llano 180° y al recto 90°
2. La longitud de la circunferencia de radio $r>0$ unidades es igual a $L=2\pi r$

unidades; la de una semicircunferencia $L_{sc}=\pi r$ y la de su cuarta parte es

$$L_{cc} = \frac{\pi}{2} r$$

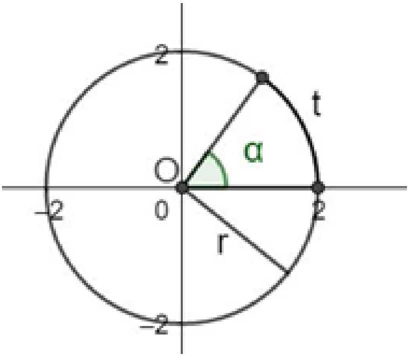


Figura 2. 2

3. En un mismo círculo, los ángulos centrales son proporcionales a sus arcos correspondientes.

A partir de las tres consideraciones anteriores se puede concluir que se cumple la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{t}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^0} \ (\pi = 3{,}14159 \dots)$$

Como la amplitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados (el radio en este caso), es posible tomar el radio de longitud 1 unidad y en este caso, la expresión anterior queda del siguiente modo: $t = \frac{\pi}{180^0}\alpha$.

El círculo antes descrito (de radio unidad) se llama círculo típico o circunferencia típica.

En algunos textos al número $\frac{\pi}{180^0}$ se le llama constante dimensional.

Aunque el sistema sexagesimal (de base 60) nos resulta “más familiar”, en física y matemáticas más avanzadas, no es corriente expresar la medida de ángulos en grados sexagesimales, porque con este sistema se introducen constantemente complicaciones innecesarias en las fórmulas. El sistema circular para la medida de ángulos elimina esta complicación. Por otro lado, como que el propósito de este libro es el estudio de las funciones de variable real, es preferible utilizar el sistema circular que asocia números reales a las amplitudes de los ángulos.

Una interesante relación se establece entre el área de un sector circular en el círculo típico y la medida del ángulo centran en el sistema circular asociado a ese sector.

El área del sector circular se determina mediante la fórmula:

$\frac{A_\alpha}{A_c} = \frac{\alpha}{360°}$ caso en que α se mida en grados sexagesimales y donde

A_α: Área del sector

A_c: Área del círculo

Cuando α se mida en radianes la fórmula adopta la forma:

$\frac{A_\alpha}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi r}$ y para el caso en que el círculo sea típico, como r=1 se tiene:

$$\frac{A_\alpha}{\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow 2\pi A_\alpha = \pi\alpha \Rightarrow \alpha = 2A_\alpha$$

Observe esta relación en Figura 2.3.

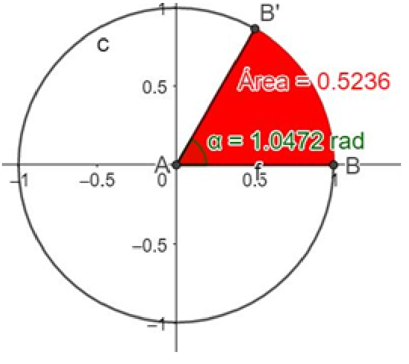


Figura 2. 3

Al estudiar las funciones hiperbólicas se volverá a esta relación al establecer las diferencias y similitudes entre ambas.

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 2. 4 Hiparco de Nicea

A Hiparco de Nicea (Nicea, c. 190 a. C.-c. 120 a. C.) se debe una tabla de cuerdas para resolver triángulos, la que comenzó con un ángulo de 71°, llegando hasta 180° con incrementos de 71°, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados de determinado ángulo central que corta a una circunferencia de radio r. Con él, la historia de la trigonometría, iniciada siglos antes con la tabla de arcilla Plimpton 322 de Babilonia y el papiro de Ahmes en Egipto, continuaba en los tiempos de la Grecia clásica, durante el siglo II a.C.

2.2. Relaciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

Consecuente con el exergo planteado en el encabezamiento del capítulo:"*El triángulo, ahora, no es considerado ya en y de por sí, sino en relación con otra figura, en relación con el círculo*" se desarrollará este análisis en base a la figura 2.3.

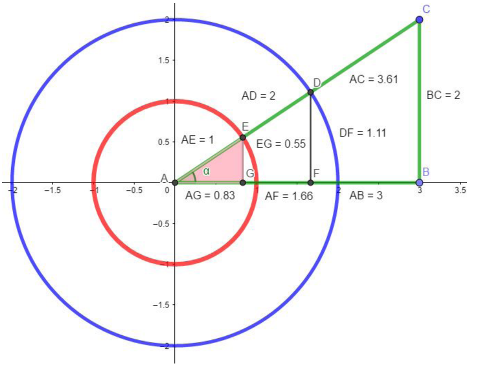


Figura 2. 5 Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

En figura 2.4 se tiene un triángulo rectángulo ⊿ABC con lados AB=3 u, BC=2 u y en consecuencia

$$AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3.6055\ldots \approx 3.61$$

y dos circunferencias de radios con magnitudes 2 y 1 respectivamente, estas circunferencias determinan los triángulos ⊿AFD y ⊿AGE tales que ⊿ABC~⊿AFD~⊿AGE por ser todos rectángulos y tener $\sphericalangle\alpha$ común, por lo tanto sus lados homólogos son proporcionales; de aquí que las razones trigonométricas se comportan según se muestra en la siguiente tabla:

Relación trigonométrica	⊿ABC	⊿AFD	⊿AGE
Seno (sen)			
$sen(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$	$sen(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3.61} = 0.55$	$sen(\alpha) = \frac{DF}{AD} = \frac{1.11}{2} = 0.55$	$sen(\alpha)=EG=0.55$
Coseno (cos)			
$cos(\alpha) = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$	$cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{3.61} = 0.83$	$cos(\alpha) = \frac{AF}{AC} = \frac{1.66}{2} = 0.83$	$cos(\alpha)=AG=0.83$
Tangente (tan ó tg)			
$tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$	$tan(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3} = 0.67$	$tan(\alpha) = \frac{DF}{AF} = \frac{1.11}{1.66} = 0.67$	$tan(\alpha) = \frac{EG}{AG} = \frac{0.55}{0.83} = 0.67$
Cotangente (cot)			
$cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$	$cot(\alpha) = \frac{1}{0.67} = 1.49$		
secante (sec)			
$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$	$sec(\alpha) = \frac{1}{0.83} = 1.2$		
Cosecante (csc)			
$csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$	$csc(\alpha) = \frac{1}{0.55} = 1.8$		

De la tabla anterior se infiere que si utilizamos la circunferencia típica para calcular las funciones trigonométrica es posible reducir el problema a determinar la abscisa y la ordenada del ángulo central como se muestra en Figura 2.4

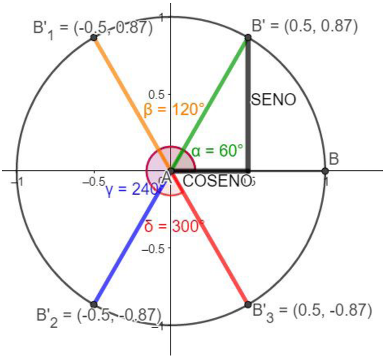


Figura 2. 4

	Seno	Coseno	Tangente
$60° \to \frac{\pi}{3}$	0.87	0.5	$\frac{0.87}{0.5} = 1.74$
$120° \to \frac{2\pi}{3}$	0.87	-0.5	$\frac{0.87}{-0.5} = -1.74$
$240° \to \frac{4\pi}{3}$	-0.87	-0.5	$\frac{-0.87}{-0.5} = 1.74$
$300° \to \frac{5\pi}{3}$	-0.87	0.5	$\frac{-0.87}{0.5} = -1.74$

De la gráfica se infieren varias propiedades:

Por tratarse de la circunferencia típica entonces, se cumple la siguiente relación pitagórica:

R_1. $(sen(\alpha))^2+(cos(\alpha))^2=1$ Esta relación es conocida como identidad fundamental.

A partir de ella podemos encontrar otra expresión para el $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5 = \frac{1}{2}$ por la identidad fundamental se tiene

$$\left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1$$

$$\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1.73}{2} \approx 0.865$$

De la relación $tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$ se tiene que

R_2. $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$

De la relación $cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$ se tiene que $cot(\alpha) = \frac{1}{\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}}$ de aquí se tiene:

R_3. $cot(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 2. 5 Aryabhata

El astrónomo y matemático hindú Aria Bhatta (476–550d.C.) estudió el concepto de «seno» con el nombre de ardhájya, siendo ardhá: 'mitad, medio', y jya: 'cuerda'. Los árabes que tradujeron estas obras, se referían a este término sánscrito como jibape, pero en el árabe escrito se omiten las vocales y el término quedó abreviado jb. Escritores posteriores que desconocían el origende la palabra creyeron que jb era la abreviatura de jiab (que significa 'bahía'). A finales del siglo XII, el Gerardo de Cremona (1114-1187) tradujo estos escritos árabes al latín, reemplazando jiab por su contraparte latina sinus ('hueco, cavidad, bahía'). Luego, ese sinus se convirtió en el español «seno».

De figura 2.4 y la correspondiente tabla relativa a las funciones trigonométricas de los ángulos

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \alpha = \frac{2\pi}{3}, \alpha = \frac{\pi}{3}, \alpha = \frac{4\pi}{3}, \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

se tiene la siguiente tabla relativa al signo y el valor de las funciones trigonométricas en cada cuadrante (C).

	I C		II C	III C	IV C
	α	$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$(\pi-\alpha)$	$(\pi+\alpha)$	$(2\pi-\alpha)$
SENO	$+sen(\alpha)$	$+cos(\alpha)$	$+sen(\alpha)$	$-sen(\alpha)$	$-sen(\alpha)$
COSENO	$+cos(\alpha)$	$+sen(\alpha)$	$-cos(\alpha)$	$-cos(\alpha)$	$+cos(\alpha)$
TANGENTE	$+tan(\alpha)$	$+cot(\alpha)$	$-tan(\alpha)$	$+tan(\alpha)$	$-tan(\alpha)$
COTANGENTE	$+cot(\alpha)$	$+tan(\alpha)$	$-cot(\alpha)$	$+cot(\alpha)$	$-cot(\alpha)$

Observe el siguiente recurso mnemotécnico[7]:

Primer cuadrante: todas las relaciones trigonométricas tienen signo positivo.

Segundo cuadrante: tiene signo positivo solo la relación trigonométrica que comienza con S: el seno.

Tercer cuadrante: tiene signo positivo solo la relación trigonométrica que comienza con T: la tangente.

Cuarto cuadrante: tiene signo positivo solo la relación trigonométrica que comienza con C: el coseno.

[7] **mnemotécnico, ca.** adj. Perteneciente o relativo a la mnemotecnia. || **2**. Que sirve para auxiliar a la memoria

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 2. 6 Claudio Pto-lomeo (c. 100-c. 170), astrónomo y matemá-tico greco-egipcio

La primera y más famosa obra de Ptolomeo, escrita originariamente en griego, se tradujo al árabe como al-Majisti (Obra magna). En Europa, las traducciones latinas medievales reprodujeron el título como Almagesti, y desde entonces se le conoce simplemente como Almagesto. En esta obra, Ptolomeo planteó una teoría geométrica para explicar matemáticamente los movimientos y posiciones aparentes de los planetas, el Sol y la Luna contra un fondo de estrellas inmóviles. Esta obra no incluía ninguna descripción física de los objetos del espacio. Pto-lomeo también contribuyó sustancialmente a las matemáticas a través de sus estudios en trigonometría y aplicó sus teorías a la construcción de astrola-bios y relojes de sol.

La tabla de relaciones trigonométricas elaborada a partir de la figura 2.4 se puede extender a otros ángulos de gran importancia principalmente para su empleo en demostraciones, soluciones de ecuaciones trigonométricas y cálculo manual como se muestra a continuación.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$no\ def.$	0	$no\ def.$	0
$cot(\alpha)$	$no\ def.$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$no\ def.$	0	$no\ def.$

Ejercicio 2.1. Desarrolle los siguientes cálculos:

1. Transformar el ángulo de grados a rad:

1) 15º	2) 35º	3) 80º	4) 150º	5) 200º
6) 90º	7) 60º	8) 45º	9) 30º	10) 540º

2. Transformar el ángulo de rad a grados:

1) $\frac{\pi}{5}\, rad$ 2) $\frac{\pi}{10}\, rad$ 3) $3\pi\, rad$ 4) $\frac{17\pi}{4}\, rad$

3. Calcular aplicando fórmula de reducción.

   - $sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$
   - $cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$
   - $tan(90^\circ+30^\circ)$
   - $cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$
   - $sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+tan(90^\circ+60^\circ)$
   - $cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)*sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

4. Determine las coordenadas del punto U que en un círculo unitario generan los siguientes ángulos y calcule el área del sector circular asociado a cada uno

i.	30°	v.	$-\frac{\pi}{6}$
ii.	$\frac{\pi}{4}$	vi.	$\frac{7\pi}{2}$
iii.	240°	vii.	$-\frac{21\pi}{4}$
iv.	$\frac{2\pi}{3}$	viii.	$\frac{11\pi}{6}$

2.3. Relaciones trigonométricas de la suma y de la diferencia de los ángulos

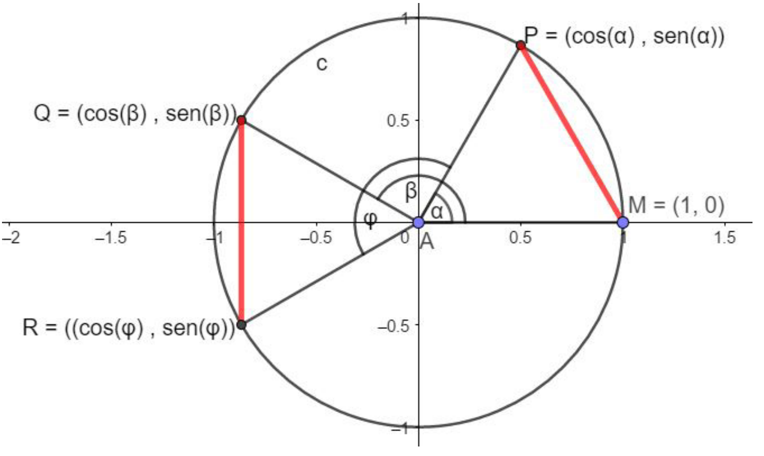


Figura 2. 7 Círculo unitario con ángulos suma para deducir las fórmulas correspondientes

En Figura 2.7 se muestra un círculo unitario de centro A en el origen de coordenadas y sea el punto $M=(1,0)$; además los ángulos α generado por el punto $P\ (\cos(\alpha),sen(\alpha))$ y el ángulo βgenerado por el punto $P\ (\cos(\beta),sen(\beta))$; el ángulo; además se tiene el ángulo $\varphi=\alpha+\beta$ generado por el punto $R\ (\cos(\varphi),sen(\varphi))$.

Un análisis del gráfico de la Figura 2.7 aplicando los conocimientos de geometría plana se tiene que ΔAMP=ΔAQR y en él $\overline{MP}=\overline{QR}$ (1) de ahí se tiene:

$$\overline{MP}=\sqrt{(\cos(\alpha)-1)^2+(sen(\alpha))^2}$$

$$\overline{QR}=\sqrt{(\cos(\varphi)-\cos(\beta))^2+\left(sen(\varphi)\right)-\ sen(\beta)\Big)^2}$$

De (1) se tiene:

$$(\cos(\alpha)-1)^2+(sen(\alpha))^2=(\cos(\varphi)-\cos(\beta))^2+\left(sen(\varphi)\right)-\ sen(\beta)\Big)^2$$

$$(\cos(\alpha))^2-2\cos(\alpha)+1+\left(sen(\alpha)\right)^2$$
$$=(\cos(\varphi))^2-2\cos(\varphi)\cos(\beta)+(\cos(\beta))^2+(\mathrm{sen}(\varphi))^2$$
$$-2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\beta)+(\mathrm{sen}(\beta))^2$$

Aplicando la identidad fundamental $(sen(\alpha))^2+(cos(\alpha))^2=1$ y simplificando la expresión anterior se tiene:

$$-2\cos(\alpha)=-2\cos(\varphi)\ \cos(\beta)-2\ sen(\varphi)\ sen(\beta)$$

$$\cos(\alpha)=\cos(\varphi)\ \cos(\beta)+sen(\varphi)\ sen(\beta) \qquad (2)$$

De $\varphi=\alpha+\beta \Rightarrow \alpha=\varphi-\beta$

Sustituyendo en (2) se tiene:

$$\cos(\varphi-\beta)=\cos(\varphi)\ \cos(\beta)+sen(\varphi)\ sen(\beta) \qquad (3)$$

Como en esta demostración no se han planteado condiciones para las posiciones de los puntos situados sobre el círculo unitario la fórmula obtenida es válida para cualquier par de ángulos.

A partir de la fórmula (3) es posible obtener otras importantes relaciones trigonométricas continuación de las tres planteadas en páginas anteriores, pero para ello es necesario hacer las siguientes consideraciones:

Sean $\theta\ y\ \phi$ dos ángulos cualesquiera y $\alpha\ y\ \beta$ otros dos ángulos que cumplen las siguientes condiciones:

I. $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta;\quad \beta=\phi$

Aplicando (3) a estos ángulos se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\phi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\phi)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}(\phi)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\theta+\phi)\right)=sen(\theta)\cos(\phi)+cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$$

$$sen(\theta+\phi)=sen(\theta)\cos(\phi)+cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$$

II. $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta;\quad \beta=-\phi$

Aplicando (3) se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\phi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(-\phi)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}(-\phi)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\theta-\phi)\right)=sen(\theta)\cos(\phi)+cos(\theta)\left(-\operatorname{sen}(\phi)\right)$$

$$sen(\theta-\phi)=sen(\theta)\cos(\phi)-cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$$

III. $\alpha=\theta; \quad \beta=-\phi$

Aplicando (3) se tiene:

$$cos(\theta-(-\phi))=cos(\theta)\ cos(-\phi)+sen(\theta)\ sen(-\phi)$$

$$cos(\theta+\phi))=cos(\theta)cos(\phi)+sen(\theta)(-sen(\phi))$$

$$cos(\theta+\phi)=cos(\theta)cos(\phi)-sen(\theta)sen(\phi)$$

IV. $\alpha=\theta; \quad \beta=\phi$

Aplicando (3) se tiene:

$$cos(\theta-\phi)=cos(\theta)\ cos(\phi)+sen(\theta)\ sen(\phi)$$

Cada una de las fórmulas obtenidas constituyen una identidad y no existen valores inadmisibles para las variables involucradas en las mismas.

En general se tiene que:

R_4. $sen(\theta\pm\phi)=sen(\theta)cos(\phi) \pm cos(\theta)sen(\phi)$

R_5. $cos(\theta\pm\phi)=cos(\theta)\ cos(\phi)\ sen(\theta)\ sen(\phi)$

$$\tan(\theta \pm \phi) = \frac{sen(\theta \pm \phi)}{\cos(\theta \pm \phi)} = \frac{sen(\theta)\cos(\phi) \pm cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cos(\phi) \mp \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)}$$

Dividiendo por $cos(\theta)\ cos(\phi)$ se tiene

$$\tan(\theta \pm \phi) = \frac{\dfrac{sen(\theta)\cos(\phi) \pm cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cos(\phi)}}{\dfrac{\cos(\theta)\cos(\phi) \mp \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cos(\phi)}} = \frac{\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} \pm \dfrac{\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}}{1 \mp \left(\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\left(\dfrac{\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}\right)}$$

R_6. $\tan(\theta \pm \phi) = \dfrac{\tan(\theta)\pm\tan(\phi)}{1\mp\tan(\theta)\tan(\phi)}$

En forma análoga se obtiene:

R_7. $\cot(\theta \pm \phi) = \dfrac{\cot(\theta)\cot(\phi)-1}{\cot(\theta)\pm\cot(\phi)}$

Si $\theta=\phi$ se obtienen las fórmulas para el ángulo duplo:

$sen(\theta+\theta)=sen(\theta)cos(\theta)+cos(\theta)sen(\theta)$

R_8. $sen(2\theta)=2sen(\theta)cos(\theta)$

En forma análoga:

R_9. $cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta$

R_10. $\tan(2\theta) = \frac{2\,tan(\theta)}{1-tan^2(\theta)}$

R_11. $cot(2\theta) = \frac{cot^2(\theta)-1}{2cot(\theta)}$

Ejercicio 2.2. Desarrolle los siguientes cálculos y demostraciones.

1. Calcule:
   a) $sen(75°)$
   b) $sen(105°)$
   c) $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
   d) $tan(75°)$
   e) $cot\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
   f) $sen(5°)$
   g) $cos(255°)$
   h) $tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
   i) $sen\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

2. Compruebe que

$$\sec(\theta+\phi) = \frac{\sec(\theta)\sec(\phi)}{1-\tan(\theta)\tan(\phi)}$$

3. Obtenga una fórmula para:

$sen(\alpha+\beta+\varphi)$

4. Demuestre que:
   a. $\csc(2\theta) = \frac{\sec(\theta)\csc(\theta)}{2}$
   b. $\sec(2\theta) = \frac{1+tan^2(\theta)}{1-tan^2(\theta)}$
5. Partiendo de que $3\theta=2\theta+\theta$, obtenga las fórmulas para calcular las relaciones trigonométricas del ángulo triplo.
6. Demostrar que: $cos^4(\theta) - sen^4(\theta) = cos(2\theta)$
7. Demuestre que:
   a. $sen^2(\beta) = \frac{1-\cos(2\beta)}{2}$
   b. $cos(\beta) = \frac{1+\cos(2\beta)}{2}$

   A partir de estos resultados y haciendo $\theta = \frac{\beta}{2}$, pruebe que las relaciones trigonométricas del ángulo mitad son:

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(\beta)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(\beta)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\beta)}{sen(\beta)} = \frac{sen(\beta}{1+\cos(\beta)}$$

8. Calcule:
   a) $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$
   b) $sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$
   c) $sen\left(22\frac{1}{2}°\right)$
   d) $cos(165°)$
   e) $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$
   f) $sen\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

2.4. Función seno.

Ya se conoce mediante la relación $sen(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$ que para cualquier número real, el ángulo que representa ese número en el sistema circular tiene su correspondiente seno dado por la ordenada del punto terminal de dicho ángulo en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas. Por tanto es posible definir la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = sen\ (x), \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$; a esta función se le llama función seno. Con la información que se tiene es posible mediante el GeoGebra hacer una representación de la misma, mostrando además cómo se genera Figura 2.8.

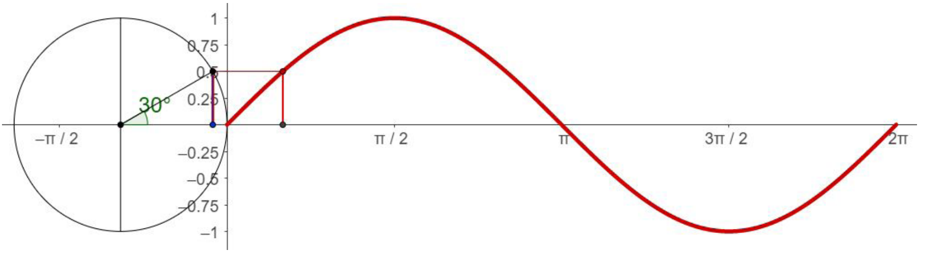


Figura 2. 8 Gráfica de la función f(x)=sen (x) simulada su generación a partir de la circunferencia unitaria.

Una gráfica de la función seno con los puntos más significativos trazada con GoeGebra se muestra en Figura 2.9

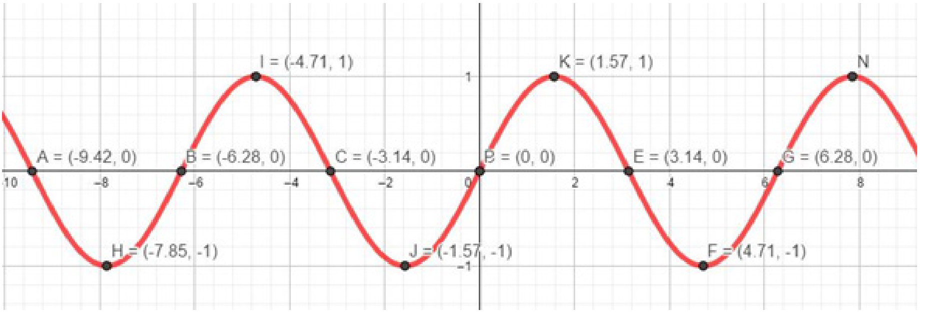


Figura 2. 9 Función seno con valores más significativos: máximo, mínimo y raíces.

Propiedades de la función f(x)=sen (x)

» **Dominio:** $Dom\ f = \mathbb{R}$ Todo número real tiene un valor para el seno.

» **Imagen:** Im f= [-1,1] Esto se puede inferir del gráfico de la figura 2.9 donde se muestran los valores máximo y mínimo (1 y -1) pero también se puede deducir de la identidad fundamental

$$(sen(\alpha))^2 + (cos(\alpha))^2 = 1 \Rightarrow cos(\alpha) = \sqrt{1-(sen(\alpha))^2} \Rightarrow 1-(sen(\alpha))^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-sen(\alpha))(1+sen(\alpha)) \geq 0 \Rightarrow sen(\alpha) \in [-1,1] \Rightarrow$$

$$Im\, f \subseteq [-1,1] \ (1)$$

Habría que probar ahora que $\forall y_0 \in [-1,1]$, $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}: y_0 = sen(x\_0)$ lo cual es cierto porque al definir el dominio de la función se expresó que "Todo número real tiene un valor para el seno"; de aquí se infiere que *[-1,1]⊆Im f* (2)

De (1) y (2) se concluye que *Im f= [-1,1]*

» **Intersección con el eje y**:

Del gráfico de la figura 2.9 se puede concluir que la gráfica corta al eje y en el punto (0,0). También analíticamente se tiene que

$(f(x)=sen(x),\forall\ x \in R) \Rightarrow (f(0)=sen(0)=0)$

» **Ceros** En figura 2.9 se observa que en el intervalo[0,2π] la curva corta en dos puntos al eje de las abscisas, en x=0 y x=π además, se observa que la curva también corta al eje x en todos sus coterminales, los números reales de la forma kπ con $k \in \mathbb{Z}$.

» **Periodicidad**. Una función es periódica de período p si $f(x+p) = f(x)\ \forall x \in Dom\, f\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*$ En figura 2.9 se muestra que la curva "se repite" por períodos de 2π, analíticamente se tiene:

$$(sen(x+p) = sen(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow sen(x+p) - sen(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \left(2cos\left(\frac{x+p+x}{2}\right) sen\left(\frac{x+p-x}{2}\right) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2cos\left(x+\frac{p}{2}\right) sen\left(\frac{p}{2}\right) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow sen\left(\frac{p}{2}\right) = 0\ \ p \in\ \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{2} = k\pi\ con\ k\ \in \mathbb{Z}^* \Leftrightarrow (p = 2k\pi\ con\ k\ \in\ \mathbb{Z}^*$$

La función seno es periódica con período principal p=2π para k=1.

- **Máximo Global**: En figura 2.9 se muestran los cálculos realizados con GeoGebra que da Máx f:1, valor que en el intervalo [0,2π] corresponde a x=$\frac{\pi}{2}$ y que dada la periodicidad de la función seno, este valor máximo se obtiene en todos los números reales de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi + 4k\pi}{2} = \frac{\pi(1+4k)}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

- **Mínimo Global**: A partir de un análisis similar se tiene que *Mín f:-1*

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi + 4k\pi}{2} = \frac{\pi(3+4k)}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

- **Signo** Se sabe que el seno es positivo en el primero y segundo cuadrante y negativo en los demás, esto se constata en Figura 2.9.

$$(f(x) = sen(x) > 0) \Rightarrow (x \in \,]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$$
$$(x \in \,]2k\pi, (2k+1)\pi\ \ [k \in \mathbb{Z})$$
$$(f(x) = sen(x) < 0) \Rightarrow (x \in \,]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$$
$$(x \in \,](2k+1)\pi, (k+1)2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z})$$

- **Paridad** $f(-x) = sen(-x) = -sen(x) = -f(x)\ \forall\, x\ \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *(f es impar)*
- **Monotonía**

  Analizando figura 2.9 se tiene:

  En el intervalo de [0,2π]

$$f(x) = sen(x)\ es\ creciente\ en \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$f(x) = sen(x)\ es\ decreciente\ en \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

  Por la periodicidad de la función *f(x)=sen(x)* se tiene:

$$f(x) = sen(x)\ es\ creciente\ en \left[2k\pi, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{(4k+3)\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right]$$

$$f(x) = sen(x)\ es\ decreciente\ en \left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$$

» **Inyectividad** La función no es inyectiva por ser periódica.

» **Sobreyectividad**: No es sobreyectiva porque el conjunto de llegada es $\mathbb{R} \neq [-1\,,1]\ (imagen)$

» **Aditiva** Una función es aditiva si

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Para el caso del seno desarrollaremos el seno de la suma de ángulos cuya deducción se realizó anteriormente

$$sen(x+y)=sen(x)\ \ cos(y)+cos(x)sen(y)\neq sen(x)+sen(y)$$

» Multiplicativa: Una función es multiplicativa si

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Para el caso del seno buscaremos un contraejemplo para probar que no cumple esta condición; para

$$x=2;\ sen(2y)=2sen(y)cos(y)\neq sen(2)sen(y)$$

» **Puntos fijos:** Tiene un punto fijo en x=0,dado que sen(0)=0

» **Continuidad:** La función es continua en todo R

La función cumple las condiciones de contracción y dilatación respecto a los ejes Y y X analizados en el primer tomo como se muestra en las siguientes gráficas:

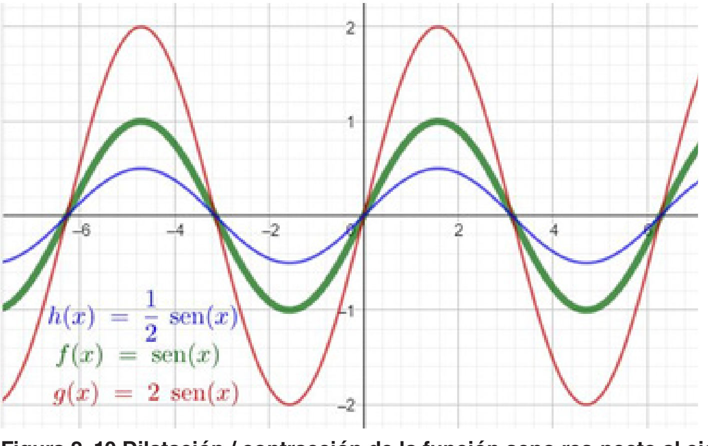


Figura 2. 10 Dilatación / contracción de la función seno res-pecto al eje de ordenadas.

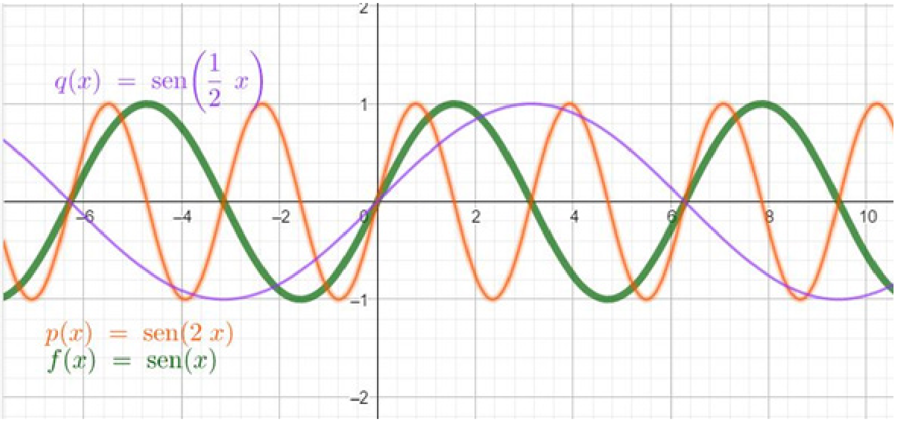


Figura 2. 11 Dilatación / contracción de la función seno respecto al eje de abscisas.

Ejercicio 2.3. Haga un estudio similar al realizado con la función seno de las siguientes funciones. Se prefiere que utilice para ello el GeoGebra para graficarlas y la opción de "puntos especiales" para calcular ceros, máximos, mínimos y otros puntos como se observa en figura 2.12

a) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3\,sen(x) - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -2\,sen(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} sen\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen(|x|), \forall\, x \in \mathbb{R}$

f) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen(\sqrt{x}), \forall\, x \in \mathbb{R}$

g) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen(\sqrt{x}), \forall\, x \in \mathbb{R}$

h) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen(2^x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

i) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \left(2^{sen(x)}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

j) $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = sen(x) + 3sen\left(\frac{x}{3}\right) + 5sen\left(\frac{x}{5}\right)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

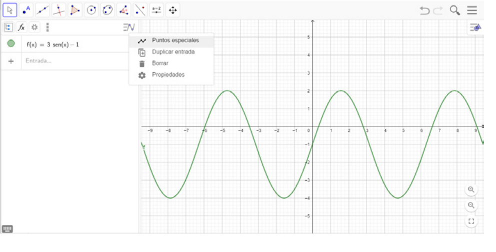


Figura 2. 12 Opción de puntos especiales

2.5. Función coseno.

Análogo al estudio de la función seno se hará la del coseno partiendo de la relación $cos(\alpha) = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$ mediante la cual se asigna, a cualquier número real que represente al ángulo α en el sistema circular, su correspondiente coseno, representado en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, por la abscisa del punto terminal de dicho ángulo, lo que permite hacer su representación gráfica y definir la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = cos\ (x), \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$; la que se designa con el nombre de la función coseno.

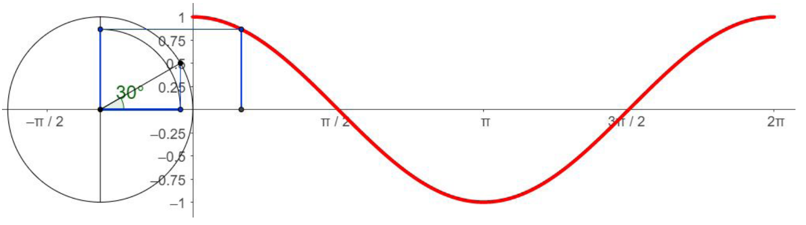


Figura 2. 13 Gráfica de la función f(x)=cos (x) simulada su generación a partir de la circunferencia unitaria.

La referencia de que, en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, la abscisa del punto terminal de dicho ángulo representa el coseno, permite construir en GeoGebra la gráfica de la función (figura 2.13); obsérvese en la gráfica el arco de circunferencia que posibilita la traslación de la longitud de la abscisa de punto de coordenada correspondiente al ángulo de 30° , hasta una posición en el eje de ordenadas, el cual se refleja en la gráfica del coseno, para generar punto a punto esta gráfica de la función coseno.

Una gráfica de la función coseno con los puntos más significativos trazada con GoeGebra se muestra en Figura 2.14

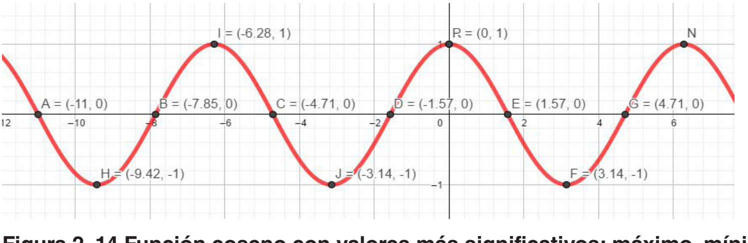


Figura 2. 14 Función coseno con valores más significativos: máximo, mínimo y raíces.

Propiedades de la función f(x)=cos (x)

- **Dominio**: *Dom f= R* Todo número real tiene un valor para el coseno.
- **Imagen**: *Im f= [-1,1]* Esto se puede inferir del gráfico de la figura 2.14 donde se muestran los valores máximo y mínimo (1 y -1) pero también, al igual que con el seno, se puede deducir de la identidad fundamental

$$(sen(\alpha))^2 + (cos(\alpha))^2 = 1 \Rightarrow sen(\alpha) = \sqrt{1-(cos(\alpha))^2} \Rightarrow 1-(cos(\alpha))^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-cos(\alpha))(1+cos(\alpha)) \geq 0 \Rightarrow cos(\alpha) \in [-1,1] \Rightarrow$$

$$Im\, f \subseteq [-1,1] \ (1)$$

Habría que probar ahora que $\forall y_0 \in [-1,1], \exists\, x_0 \in \mathbb{R}: y_0 = cos(x_0)$ lo cual es cierto porque al definir el dominio de la función se expresó que "Todo número real tiene un valor para el coseno"; de aquí se infiere que

[-1,1]⊆Im f (2)

De (1) y (2) se concluye que *Im f= [-1,1]*

- **Intersección con el eje y**:

Del gráfico de la figura 2.14 se puede concluir que la gráfica corta al eje y en el punto (0,1). También analíticamente se tiene que

$$(f(x) = cos(x), \forall\, x \ \in \mathbb{R}) \Rightarrow (f(0) = cos(0) = 1)$$

Haciendo un alto para continuar, es conveniente analizar la función coseno comparándolo con la función seno, hasta el momento se ha visto que ambas funciones coinciden en dominio e imagen y difieren en la intersección con el eje de ordenadas; en Figura 2.15 se muestra la relación entre el seno y el coseno.

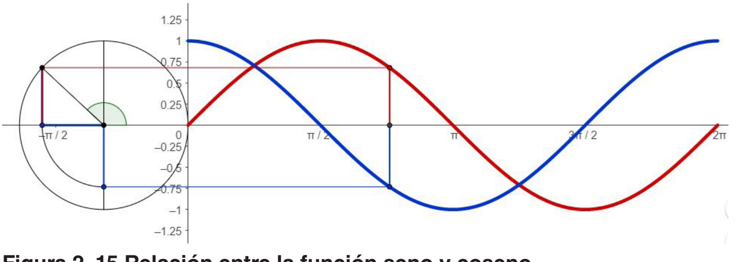


Figura 2. 15 Relación entre la función seno y coseno

Observe en la gráfica de figura 2.15 que los valores de la función cos(x) se "desplaza" $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto a la función sen(x), por mencionar solo dos puntos significativos, $sen(0) = 0\,;\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ en $x = 0\ f(x) = sen(x)$ tiene un máximo; en x = $\frac{\pi}{2}$ *f(x)=cos(x)* tiene un máximo.

Pero esta "inferencia visual" se debe demostrar analíticamente; para ellos hay que partir de dos identidades: (1) $\cos(-x) = \cos(x)$ (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen(x) \forall\, x \in \mathbb{R}$

Sea *f(x)=cos(x)* aplicando las identidades anteriores se tiene:

$$(f(x) = \cos(x)\,, \forall\, x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \left(f(x) = \cos(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right), \forall\, x \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) \forall\, x \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow (f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Es decir, que la función coseno no es más que la función seno trasladada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda. Luego, muchas de las propiedades de la función coseno son las mismas que las propiedades de la función seno o pueden deducirse de ella.

» **Ceros** En figura 2.14 se observa que en el intervalo[0,2π] la curva corta en dos puntos al eje de las abscisas, que aplicando el criterio de trasladar los valores del seno $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda se tiene que los ceros de la función coseno son $x = 0 + \frac{\pi}{2}\ y\ x = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\ \ x = \frac{\pi}{2}\ y\ x = \frac{3\pi}{2}$ además, se observa que la curva también corta al eje x en todos sus coterminales, los números reales de la forma $\frac{(2k+1)\pi}{2}\ con\ k\ \in \mathbb{Z}$.

» **Periodicidad**. La función seno es periódica con período principal p=2π para k=1. Haciendo una traslación de $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda no altera el período por tanto la función coseno es periódica de período p=2π.

» **Máximo Global:** *(Im f=[-1,1])⇒Máx f:1*

Se alcanza en $(f(x) = \cos(x) = 1) \Rightarrow (x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ )$

» **Mínimo Global:** *(Im f=[-1,1])⇒Mín f:-1*

Se alcanza en $(f(x) = \cos(x) = -1) \Rightarrow (x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\ )$

» **Signo** De los signos del seno trasladando los valores de x, /2 unidades a la izquierda se tiene:

$$(f(x) = cos(x) > 0) \Rightarrow \ (x \in \left]\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right[k \in \mathbb{Z})$$

$$(f(x) = sen(x) < 0) \Rightarrow \left(x \in \left]\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right[k \in \mathbb{Z}\right)$$

» **Paridad** $f(-x) = cos(-x) = cos(x) = f(x)\, \forall\, x\ \in \mathbb{R} \Rightarrow (f\ es\ par)$

» **Monotonía**

Trasladando a la izquierda el valor de x, $\frac{\pi}{2}$ unidades los intervalos de monotonía de la función seno se tiene para f(x)=cos(x) :

f(x)=cos(x) es creciente en[(2k-1)π,2kπ]

f(x)=cos(x) es decreciente en[2kπ,(2k+1)π]

» **Inyectividad** La función no es inyectiva, porque la función es periódica

» **Sobreyectividad:** No es sobreyectiva porque el conjunto de llegada es *R≠[-1 ,1]* (imagen)

» **Aditiva** La función no es aditiva; un contraejemplo lo evidencia

$f(x+y) = f(x) + f(y) \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

» **Multiplicativa**: Una función no es multiplicativa

Para el caso del coseno buscaremos un contraejemplo para probar que no cumple esta condición; para

$x=2; cos(2y)=cos^2(y)- sen^2(y)\neq cos(2)cos(y)$

» **Puntos fijos**: La función f(x)=cos(x) tiene un punto fijo pero que no es tan fácil de calcular como el caso de la función seno, pero el GeoGebra facilita este cálculo como se muestra en la figura 2.16 con un cálculo mediante el cálculo simbólico (CAS) y empleando la representación gráfica y la determinación del punto de intersección de la curva de la función coseno y la recta y=x.

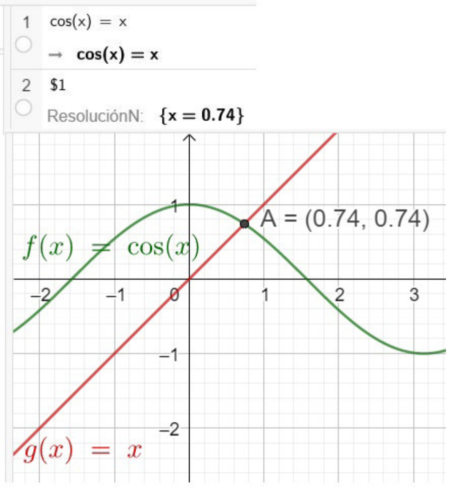


Figura 2. 16 Punto fijo de la función coseno

» **Continuidad:** La función es continua en todo $\mathbb{R}$

La función cumple las condiciones de contracción y dilatación respecto a los ejes Y y X analizados en el primer tomo como se muestra en las siguientes gráficas:

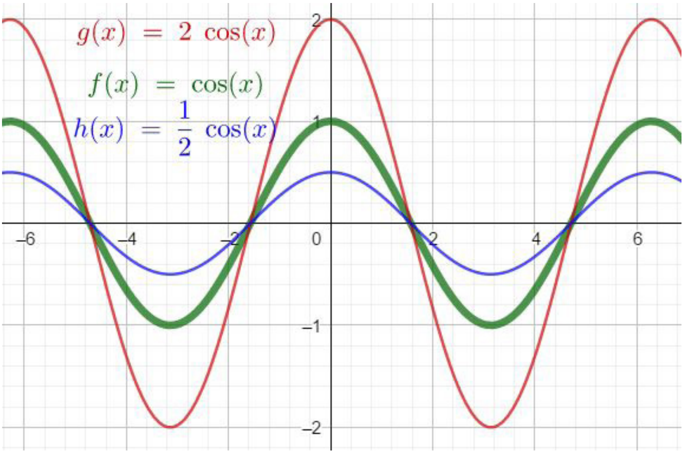


Figura 2. 18 Dilatación / contracción de la función coseno respecto al eje de ordenadas.

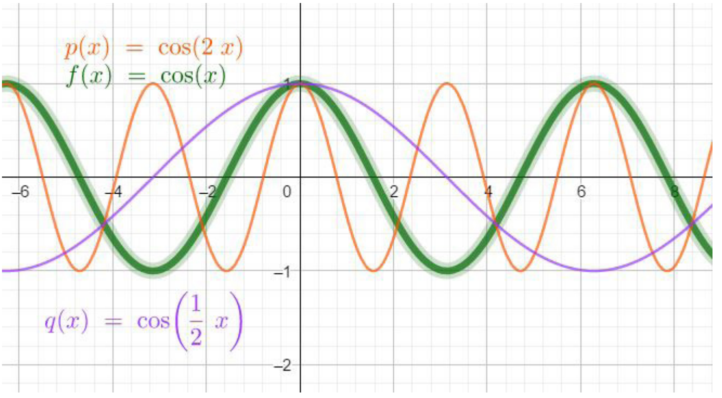


Figura 2. 17 Dilatación / contracción de la función coseno respecto al eje de abscisas.

Ejercicio 2.4. Haga un estudio similar al realizado con la función coseno de las siguientes funciones. Al igual que lo planteado en ejercicio 2.3 se prefiere utilizar el GeoGebra para graficarlas y emplear la opción de "puntos especiales".

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3\,cos(x) - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -2\,cos(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos(|x|), \forall\, x \in \mathbb{R}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos(2^x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \left(2^{cos(x)}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cos(x) + 3cos\left(\frac{x}{3}\right) + 5cos\left(\frac{x}{5}\right)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Aunque el gráfico de la figura 2.19 incluyen las gráficas de dos ejercicios planteados en los grupos de ejercicios 2.3 y 2.4, por la belleza y curiosidad de las mismas se incluye en el texto como elemento motivacional, para que los lectores desarrollen los ejercicios planteados.

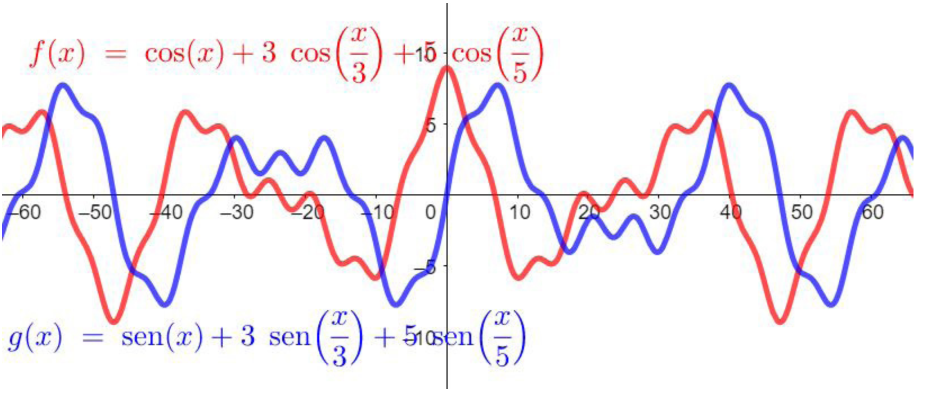


Figura 2. 19 Gráficos que muestran la combinación de la funciones seno y coseno.

2.6. Función tangente.

Al igual que con las funciones seno y coseno comenzaremos a estudiar la función tangente a partir de la relación $tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$ o mejor, como ya se estudiaron las funciones seno y coseno, se tiene la identidad $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. En este momento ya podemos constatar que existen valores de α para los cuales no existe la tangente, en particular aquellos que satisfacen la ecuación $cos(\alpha)=0$, es decir, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y todos sus coterminales; pero esto queda para el momento de analizar el dominio y la imagen de la función, por el momento esta se define de la siguiente forma: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = tan\ (x), \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$; la que se designa con el nombre de la función tangente.

La generación de la gráfica de la función tangente a partir de la circunferencia unitaria se muestra en figura 2.20

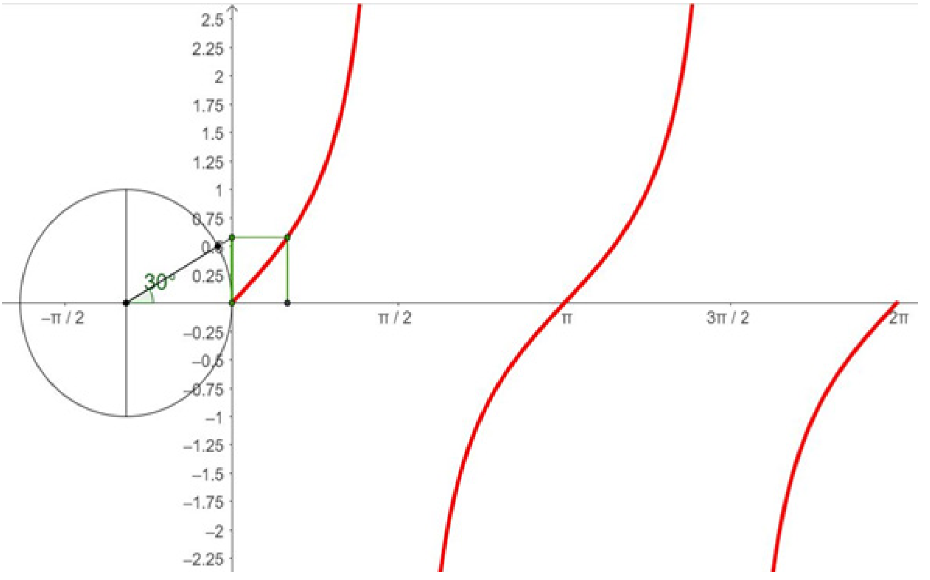


Figura 2. 20 Gráfica de la función *f(x)=tan(x)* **simulada su generación a partir de la circunferencia unitaria.**

Observe que la línea utilizada para generar el gráfico de la función es el segmento de tangente que pasa por el punto (1,0) de la circunferencia unitaria e intercepta al lado del ángulo que no coincide con el eje x.

Al igual que para el estudio de las funciones seno y coseno se muestra una gráfica de la función tangente con los puntos más significativos trazada con GoeGebra. Figura 2.21

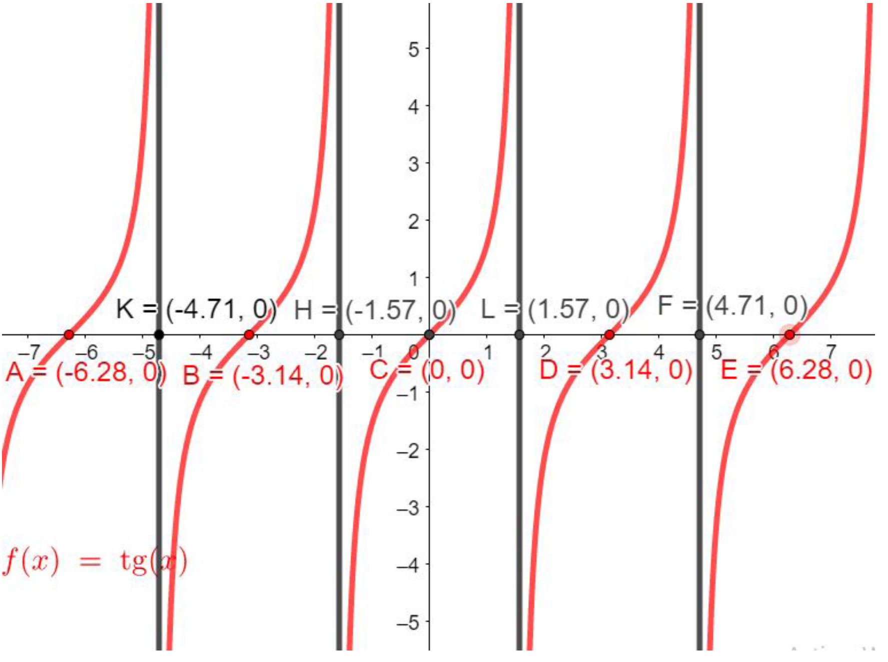


Figura 2. 21 Función tangente con valores más significativos: raíces y asíntotas.

Propiedades de la función f(x)=tan (x)

La primera información que nos brinda la gráfica de figura 2.21 es que la función tangente no es continua se dijo en la introducción del epígrafe el punto de discontinuidad está en los valores tales que

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}\,; k \in \mathbb{Z}$$

» **Dominio:** De lo analizado respecto a los puntos de discontinuidad se puede concluir que:

$$Dom\, f = D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} | x = \frac{(2k+1)\pi}{2}\,; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

» **Imagen** Aunque se puede hacer una artificiosa deducción para concluir que Im *f*= $\mathbb{R}$ pero en este caso el gráfico es evidencia suficiente[8].

[8] Para profundizar ver Ocho Rojas, R. (2008). Funciones y temas afines (Vol. II). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

» **Ceros**: A partir de la identidad $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ se tiene que *tan(α)=0* para los valores tales que *sen(α)=0* situación ya analizada al estudiar la función seno, de modo que son ceros de la función tangente todos los números reales de la forma kπ con $k \in \mathbb{Z}$

» **Periodicidad**.

$$(tan(x+p) = tan(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow (tan(x+p) - tan(x) = 0$$

$$\forall x,\ \ x+p \in D\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{sen(x+p)}{cos(x+p)} - \frac{sen(x)}{cos(x)} = 0\ \forall x,\ \ x+p \in D\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{sen(x+p)cos(x) - sen(x)cos(x+p)}{cos(x+p)cos(x)} = \mathbf{0}\ \forall x,\ \ x+p \in D\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{sen(x+p-x)}{cos(x+p)cos(x)} = \mathbf{0}\ \ \forall x,\ \ x+p \in D\ y\ p \in\ \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow sen(p) = 0, p \in\ \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p = k\pi;\ k\ \in \mathbb{Z}^*$$

Del resultado final se infieren que la función tangente tiene por período principal para *k=1,p=π*

» **Máximo Global, Mínimo Global**: Como Im *f*= $\mathbb{R}$ la función no tiene ni máximos ni mínimos globales.

» **Signo**: Como la tangente es positiva para los ángulos primero y cuarto cuadrante, eso se expresa del siguiente modo:

$$(f(x) = \tan(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x \in \left]k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[\right)$$

$$(f(x) = \tan(x) < 0 \Leftrightarrow \left(x \in \left]\frac{(2k+1)\pi}{2}, (k+1)\pi\right[\right)$$

» **Paridad**:

(f(-x)=tan(-x)=-tan(x)=-f(x),∀ x∈D)⇒(f es impar)

» **Monotonía**

En el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la función *f(x)=tan(x)* es estrictamente creciente; como su período es kπ, entonces es también estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[= \left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$

» **Inyectividad** La función no es inyectiva, porque la función es periódica

» **Sobreyectividad**: Es sobreyectiva porque el conjunto de llegada es $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ (imagen)

» **Aditiva** La función no es aditiva; un contraejemplo lo evidencia

$f(x+y) = f(x) + f(y) \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = no\ definida \neq tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}+1}{3}$$

» **Multiplicativa**: Una función no es multiplicativa

Para el caso de la tangente buscaremos un contraejemplo para probar que no cumple esta condición; para

$$x = 2;\ tan(2y) = \frac{2\,tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)} \neq tan(2)tan(y)$$

» **Continuidad**: La función no es continua, tiene punto de discontinuidad en cada valor de x de la forma $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$

» La función cumple las condiciones de contracción y dilatación respecto a los ejes Y y X analizados en el primer tomo como se muestra en las siguientes gráficas:

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 2. 22 François Viète

François Viète matemático francés (1540-1603). Uno de los principales precursores del álgebra, al representar los parámetros de una ecuación mediante letras. Ejerció gran influencia en la trigonometría. Estructuró el "Canon" de la trigonometría esférica, basado en el teorema del seno y un teorema del coseno con fórmulas atribuidas posteriormente a Neper. Fue el creador de una verdadera goniometría. En su obra aparecían transformaciones algebraicas mediante símbolos para la conversión o transformación de relaciones trigonométricas, sin recurrir a figuras. Esto abarca desde. los teoremas de adición de las funciones trigonométricas y el desarrollo de $\cos nt$ y $\frac{sen\, nt}{sen\, t}$ como suma de funciones de $cos\ t$. hasta el teorema de Moivre.

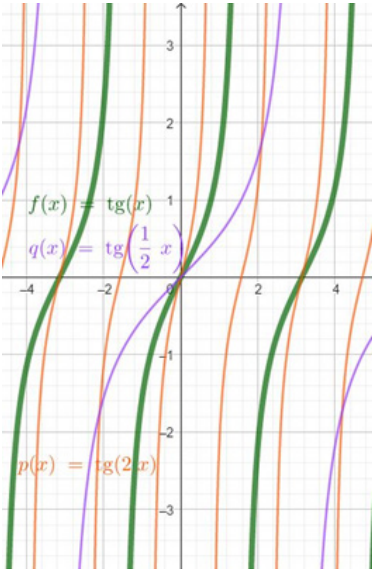


Figura 2. 23 Dilatación / contracción de la función tangente respecto al eje de ordenadas

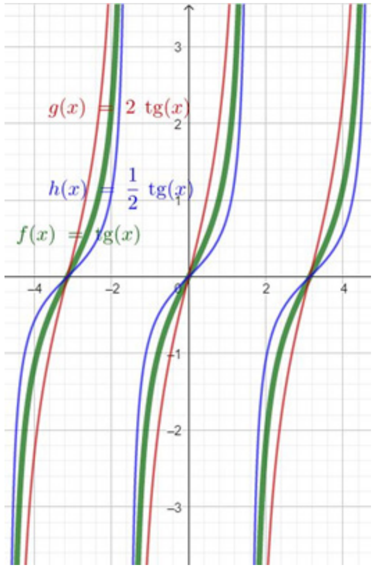


Figura 2. 24 Dilatación / contracción de la función tangente respecto al eje de ordenadas

Ejercicio 2.5. Haga un estudio similar al planteado en ejercicio 2.3 y 2.4 con los siguientes ejercicios relacionados con la función tangente.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3\,tan(x) - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -2\,tan(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}tan\left(\frac{x}{2}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan(|x|), \forall\, x \in \mathbb{R}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan(\sqrt{x}), \forall\, x \in \mathbb{R}$

g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan(\sqrt{x}), \forall\, x \in \mathbb{R}$

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan(2^x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \left(2^{tan(x)}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}$

j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = tan(x) + 3tan\left(\frac{x}{3}\right) + 5tan\left(\frac{x}{5}\right)$

k) Dado los gráficos de las funciones secante y cosecante haga un estudio de los mismos análogos a los realizados en el texto con las funciones seno, coseno y tangente.

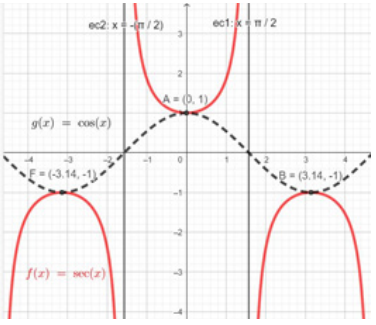


Figura 2. 25 Gráfico de la función secante

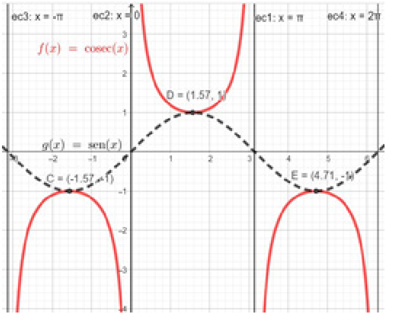


Figura 2. 26 Gráfico de la función cosecante

2.7. Funciones trigonométricas inversas.

Como se ha dicho las funciones trigonométricas no son biyectivas, por tanto, no tienen inversa, pero esta dificulta se puede superar restringiendo el dominio de cada una y de esta manera obtener funciones biyectivas.

Para el seno el dominio se restringe al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Para el coseno el dominio se restringe al intervalo $[0,\pi]$

Par la tangente el dominio se restringe al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Quedando los gráficos de la siguiente forma:

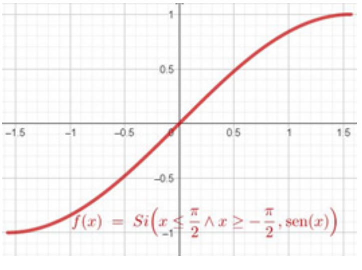


Figura 2. 27 Función seno con dominio restringido

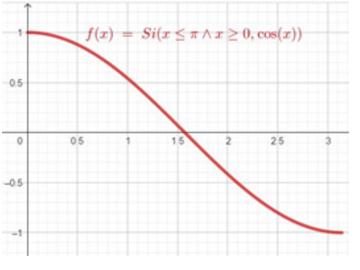


Figura 2. 28 Función coseno con dominio restringido

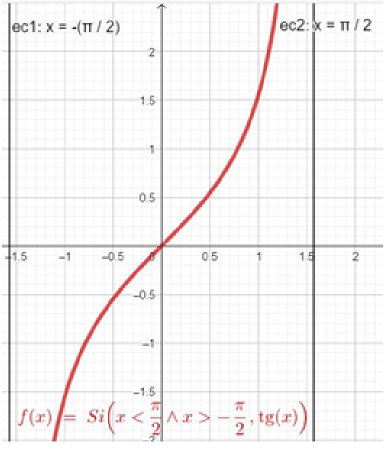


Figura 2. 29 Función tangente con dominio restringido

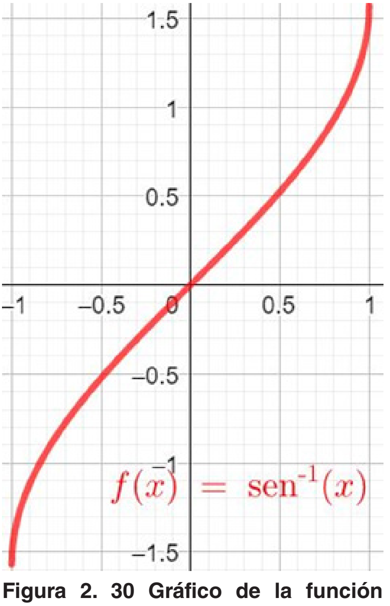


Figura 2. 30 Gráfico de la función Arcoseno.

La función inversa del seno de un ángulo es (α=arcoseno(x)) significa que x=sen(α).

Se define como:

$$f: [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : f(x) = arcsen\ (x)$$

Es frecuente también la notación $\mathrm{sen}^{-1}(x)$

Ejemplo $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ porque $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

De aquí se infiere que:

$\mathrm{sen}(\mathrm{sen}^{-1}(x)) = \mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}(x)) = x$

Propiedades de la función $f(x)=\mathrm{sen}^{-1}(x)$

Dominio $x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1,1] : -1 \leq x \leq 1$

Imagen $y \in \mathbb{R} \mid y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Ceros: Tiene un cero en x=0.

Monotonía: monótono creciente.

Continuidad: Continua en todo su dominio.

Figura 2. 31 Respuesta en grados y radianes

Las funciones inversas tienen aplicación en la solución de ecuaciones cuando estos resultados no coinciden con ángulos notables como puede

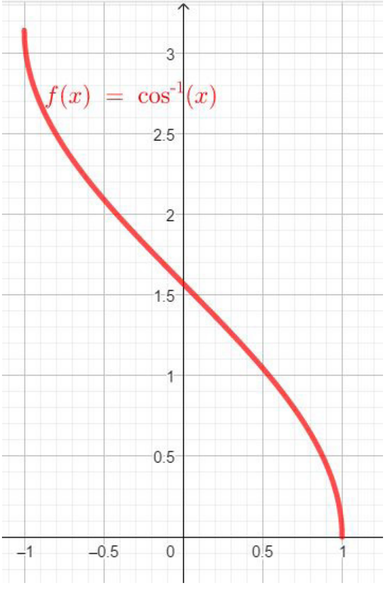


Figura 2. 32 Gráfico de la función Arcocoseno.

ser $sen(\alpha)=0.73$ su solución es $\alpha=sen^{-1}(0.73)=46.89°$ o

$\alpha=sen^{-1}(0.73)=0.82$ (Figura 2.31)

La función inversa del coseno de un ángulo es $(\alpha=arcocoseno(x))$ significa que análogo al seno se tiene $x=cos(\alpha)$.

Definición:

$f:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]: f(x)=arccos(x)$, o por $cos^{-1}(x)$

Ejemplo $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ porque $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ y al igual que con el seno se cumple que:

$cos(cos^{-1}(x))=cos^{-1}(cos(x))=x$

Propiedades de la función $f(x)=cos^{-1}(x)$

Dominio $x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1,1]: -1 \leq x \leq 1$

Imagen $y \in \mathbb{R} \mid y \in [0,\pi]: 0 \leq y \leq \pi$

Ceros: No tiene cero.

Monotonía: monótono decreciente.

Continuidad: Continua en todo su dominio.

La función inversa de la tangente de un ángulo es $(\alpha=arctan(x))\Rightarrow x=tan(\alpha)$.

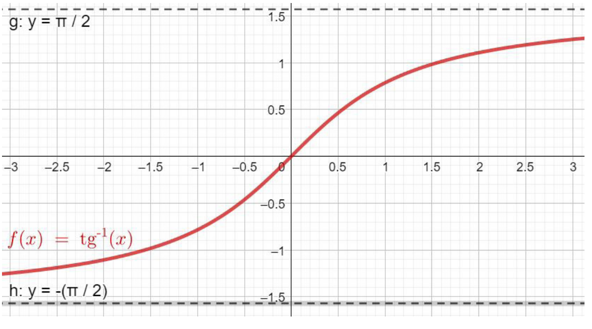


Figura 2. 33 Gráfico de la función Arcotangente.

Definición:

$f:\mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: f(x)$=*arctan (x)*, o por $tan^{-1}(x)$

Ejemplo $tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$ porque $tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ y se cumple que:

$tan(tan^{-1}(x))=tan^{-1}(tan(x))=x$

Propiedades de la función $f(x)=tan^{-1}(x)$

Dominio $\mathbb{R}$

Imagen $y \in \mathbb{R} \mid y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Ceros: Tiene un cero en x=0.

Monotonía: monótono creciente.

Continuidad: Continua en todo su dominio.

2.8. Ecuaciones trigonométricas.

Una definición inmediata de ecuaciones trigonométricas expresa que son aquellas donde la variable aparece como el ángulo de al menos una razón trigonométrica.

Una definición más detallada es la siguiente:

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones trigonométrica de variable x y sean D_1 y D_2 sus respectivos dominios. Resolver una ecuación trigonométrica f(x)=g(x) significa determinar el conjunto S denominado conjunto solución, conformado por los valores "r" tales que $f(r)=g(r)$; observe que una condición necesaria para que cierto valor r sea solución de la ecuación dada es que $r \in D_1$ y $r \in D_2$

La solución completa de una ecuación es el conjunto S de todos los valores admisibles de la variable que satisfacen la ecuación. Al igual que en el álgebra, cualquier valor perteneciente a S se denomina una raíz (o una solución) de la ecuación.

Sí una ecuación trigonométrica dada no es imposible, puede tener o no infinito número de raíces dependiendo de la estructura de la ecuación. Si la variable entra en la ecuación sólo en forma de funciones trigonométricas, tendrá un número infinito de raíces; (ejemplo4 $\cos^2(x)+8\ sen(x)+1=0$) porque si x es una raíz, también lo son sus coterminales. Pero si la variable que entran en la ecuación también tiene expresiones en forma algebraica (por ejemplo: $sen(x)-x+1=0$) entonces el número de raíces puede ser finito.

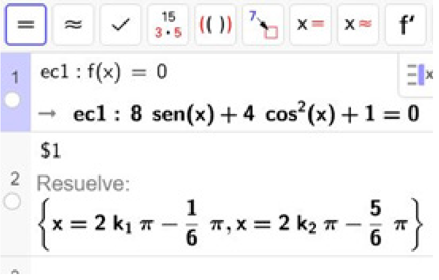


Figura 2. 34 Las infinitas soluciones de la ecuación $4\cos^2 x+8senx+1=0$, **mediante CAS del GeoGebra**

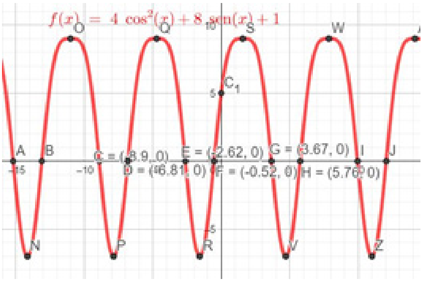


Figura 2. 35 $4\cos^2 x+8senx+1=0$ **tiene infinitas soluciones**

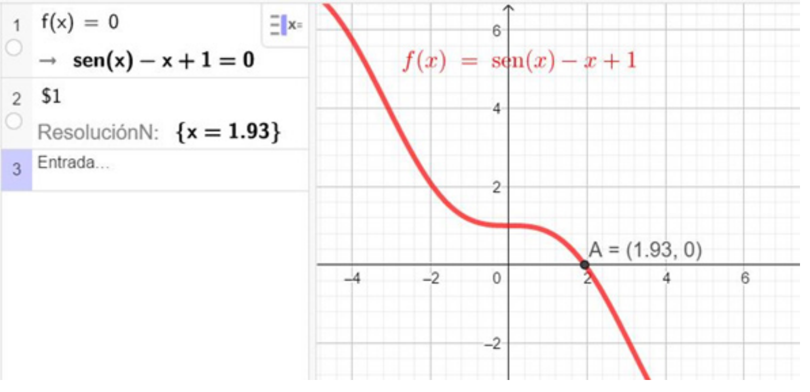


Figura 2. 36 sen(x)-x+1=0 tiene una sola solución, observe el comando CAS (ResoluciónN); resolución numérica, mientras 3.34 dice solamente Resuelve

Generalmente en la enseñanza media sólo se tratan ecuaciones de la primera clase porque las de la segunda clase sólo pueden resolverse mediante métodos de aproximación numérica o por métodos gráficos que dan también soluciones de limitada exactitud. Afortunadamente mediante asistentes matemáticos como el GeoGebra esta dificultad está resuelta, como explicaremos con más detalles.

Las ecuaciones trigonométricas se presentan en diversas formas, y las técnicas para resolverlas manualmente también son también muy variadas, por lo que no puede darse una regla práctica aplicable a todos los casos, pero el siguiente algoritmo es bastante efectivo:

Algoritmo

Para resolver ecuaciones trigonométricas:

1. Analizar si se puede factorizar o realizar alguna otra transformación algebraica.
2. Transformar todas las funciones a un mismo ángulo aplicando identidades.
3. Expresar todas las funciones trigonométricas en términos de una misma función.
4. Resolver la ecuación haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
5. Determinar los valores de x que satisfacen las ecuaciones transformadas.

Siguiendo este algoritmo la ecuación $4cos^2(x)+8\,sen(x)+1=0$ se resuelve del siguiente modo:

Paso 1: No tiene factorización.

Paso 2: $4cos^2(x)+8\,sen(x)+1=0 \Rightarrow 4(1-sen^2(x))+8\,sen(x)+1=0 \Rightarrow$

Paso 3:

$$\Rightarrow \frac{(4\,sen(x)-10)(4\,sen(x)+2)}{4}=0 \Rightarrow \frac{2(2\,sen(x)-5)2(2\,sen(x)+1)}{4}=0$$

$$\Rightarrow 2\,sen(x)-5=0 \quad \text{ó} \quad 2\,sen(x)+1=0$$

$$\Rightarrow 2\,sen(x)=5 \quad \text{ó} \quad 2\,sen(x)=-1$$

Paso 5:

$$\Rightarrow sen(x)=\frac{5}{2}>1\ (solución\ imposible) \quad \text{ó}$$

$$sen(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6} \quad \text{ó} \quad x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

Solución General:

$$x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad \text{ó} \quad x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}$$

Observe que estas soluciones son equivalentes a las dadas por Geogebra con la diferencia que en esta los ángulos se toman en sentido contrario a las manecillas del reloj mientras la solución del GeoGebra está tomada en el sentido de las manecillas del reloj.

En ocasiones no es indispensable expresar la ecuación en términos de una misma gunción como se muestra en la siguiente ecuación:

sen(2x)+2 cos(x)=0

Paso 2: *sen(2x)+2 cos(x)=0⇒2sen(x) cos(x)+2cos(x)=0*

Paso 4: *2sen(x) cos(x)+2 cos(x)=0⇒2 cos(x) (sen(x)+1)=0*

Paso 5: $2\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ó } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$sen(x) + 1 = 0 \Rightarrow sen(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

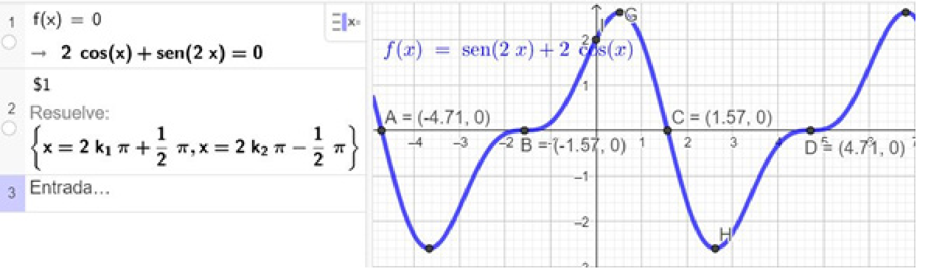


Figura 2. 37 Solución de la ecuación sen(2x)+2 cos(x)=0

Aunque de las distintas imágenes presentadas se puede inferir las posibilidades que ofrece GeoGebra para la solución de ecuaciones es conveniete sistematizar el método mediante una ecuación trigonométrica "atípica" porque su solución es mediante métodos numéricos de aproximación, pero que el GeoGebra permite encontrar la solución por una vía más sencillas:

$$sen(x) - \frac{1}{x} = 0$$

Figura 2. 38 Opción para punto de intersección de dos curvas

Método # 1:

a) Descomponer la ecuación en dos funciones:

$f(x) = sen(x); \quad g(x) = \frac{1}{x}$

b) Mediante la opción Intersección del menú Punto determinar los puntos de intersección entre las dos curvas en las que se descopuso la ecución:

$$sen(x) = \frac{1}{x}$$

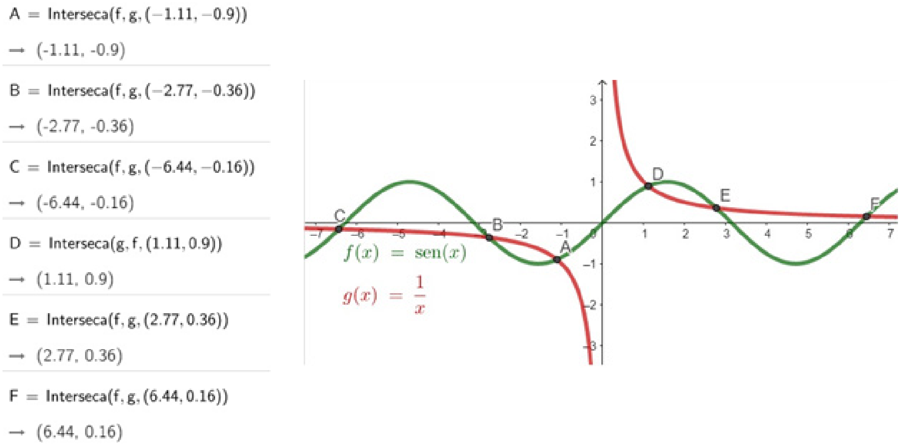


Figura 2. 39 Puntos de intersección de las curvas que representan las funciones f(x) y g(x)

Método # 2

a) Escribir la función completa $f(x) = sen(x) - \frac{1}{x}$

b) Mediante la opción Intersección del menú Punto determinar los puntos de intersección entre la función y el eje de las abscisas.

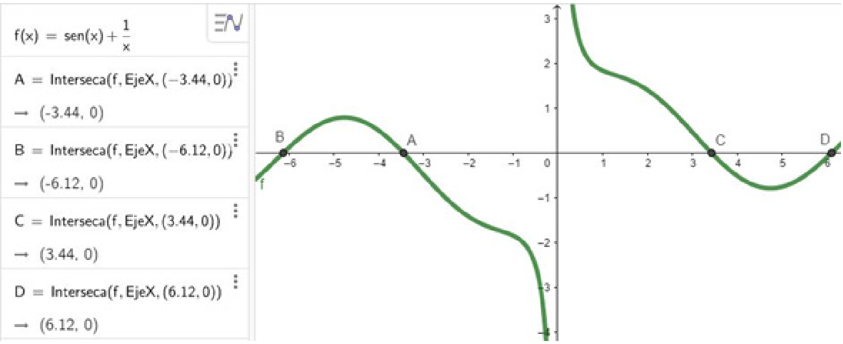


Figura 2. 40 Puntos de intersección de función con eje de abscisas

Figura 2. 41

Método # 3

a) Escribir la función completa f(x)=sen(x)-1/x

b) Usar la opción de puntos especiales tratada enteriormente.

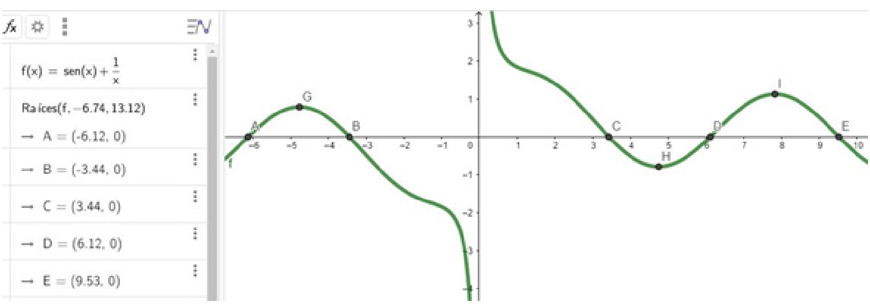


Figura 2. 42 Función y empleo de la opción de menú "puntos especiales" observe que en la vista algebraica aparece el texto "Raíces"

Método # 4

Mediante el análisis de la función por intervalos.

GeoGebra tiene la opción “Inspección de Funciones”, (figura 2.41) mediante la cual es posible analizar la función por intervalos como se muestra en la figura 2.43

Propiedad	Valor
Mínimo	(4.7566 , -0.7888)
Máximo	(1.0683 , 1.8125)
Raíz	3.44

Figura 2. 43 Determinar raíces por intervalos mediante inspección de funciones

Método # 5 Mediante el Cállculo simbólico (CAS)

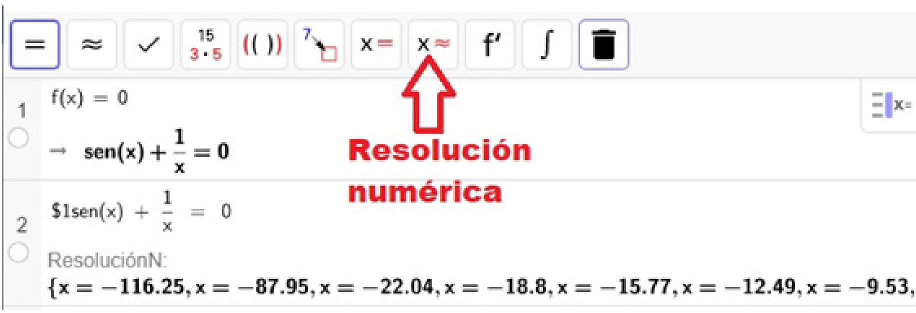


Figura 2. 44 Cálculo simbólico

Una vez activada la vista CAS se tiene una pantalla como la que se muestra en Figura 2.44.

El cálculo simbólico también pude aplicarse a la solución de inecuaciones como se muestra en figura

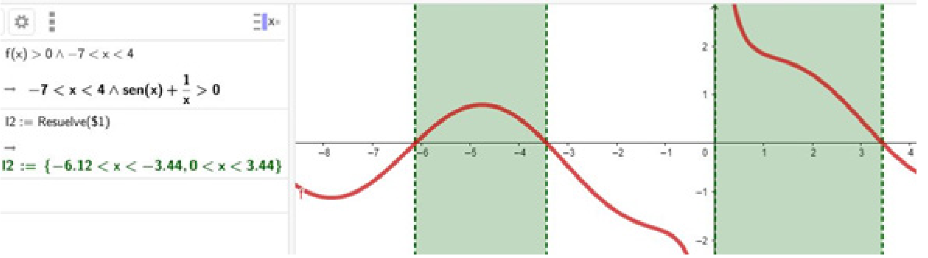


Figura 2. 45 Solución de inecuaciones trigonométricas con CAS

Ejercicio 2.6. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas utilizando las posibilidades que ofrecen los asistentes matemáticos como el GeoGebra.

a. $\cos^2 x - sen^2 x - senx = 0$

b. $\sqrt{\cos 2x + \cos^2 x} = \sqrt{5sen^2 x}$

c. $\log_2 \sqrt{17 + senx} = 2$

d. $\sqrt{9^{sex(senx+1)-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e. $2arcsen(x) - \cos(2x) = \frac{3}{2}$

f. $xsen^2(x) = 1$

g. $\frac{sen(x)}{x} = -1$

h. $x^2 \cos(x) = 0$

i. $\log_{sen(x)}\big(\cos(2x) + 2sen(x)\big) = 2$

j. $9^{sen(x)} - 3^{\sqrt{sen(x)-1}} = 8$

k. $2e^{-x} sen(2x) = 1$

l. $2\ln(x) - sen(x)$

m. $e^{arcsen(x)} + e^{sen(x)} = 3$

n. $\log_{\tan(x)} x = 2\cos(2x)$

o. $\cos(\log_2 x) = \operatorname{sen}(\log_2 x)$

2.9. Derivadas de las funciones trigonométricas y de sus inversas.

En "Elementos de Funciones Algebraicas (Tomo I)", epígrafe 3.7. que trata sobre "Monotonía de una función (crecimiento o decrecimiento)" y en él se planteó las posibilidades del GeoGebra para calcular la derivada de una función, asociando éste concepto al cálculo de la pendiente de las rectas tangentes a una curva en cualquiera de sus puntos; al respecto, en el referido libro se plantea:

> …si existiera una función, llamémosla d caracterizada por: $d: x \in \text{Dom } f \rightarrow m\_Tf$
>
> mTf: Pendiente de la recta tangente a f en (x,f(x)) se podría concluir que:
>
> *Si d(x)>0 entonces f es creciente*
>
> *Si d(x)=0 entonces en (x, f(x)) hay un extremo de f*
>
> *Si d(x)<0 entonces f es decreciente.*
>
> La función que se ha descrito existe, su estudio corresponde al Cálculo Diferencial y se llama derivada de la función f, posee las bondades descritas, tiene diferentes notaciones, aquí se empleará la notación f'(x). y su estudio marcó un gran avance en el desarrollo de toda la ciencia a partir del siglo XVII. (López Fernánez, Crespo Borges, Crespo Hurtado, & Palmero Urquiza, 2021), Pág.72

A continuación, se mostrarán los gráficos de las funciones trigonométricas y de sus inversas con las derivadas respectivas.

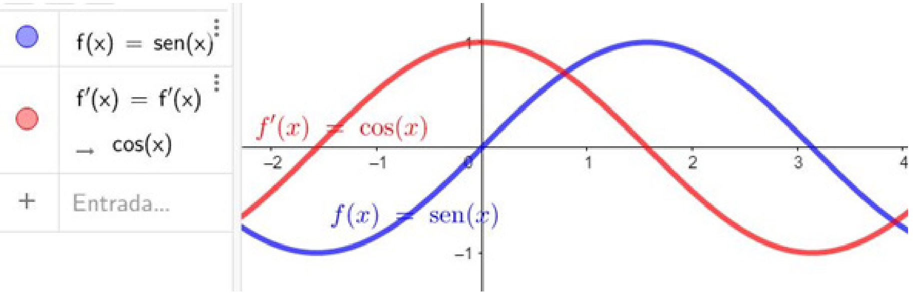


Figura 2. 46 Función f(x)=sen(x) y su derivada f'(x)=cos(x)

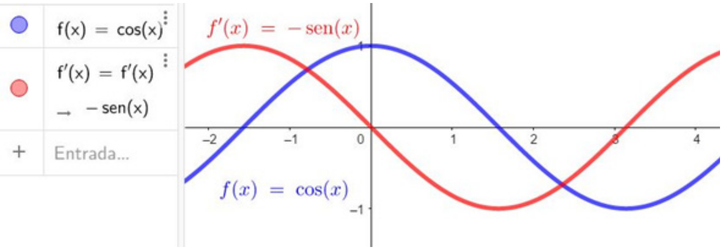


Figura 2. 47 Función f(x)=cos(x) y su derivada $f'^{(x)}$ =-sen(x)

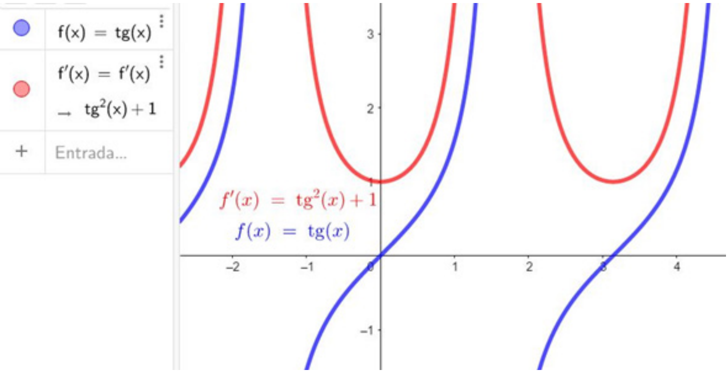


Figura 2. 48 Función f(x)=tan(x) y su derivada $f'^{(x)}$ =tan² (x)+1=sec² (x)

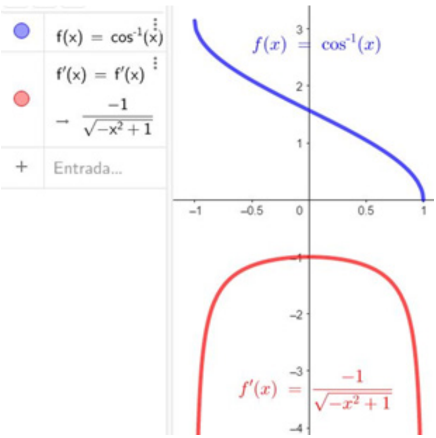


Figura 2. 49 Función f(x)=arccos(x) y su derivada $f'^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$

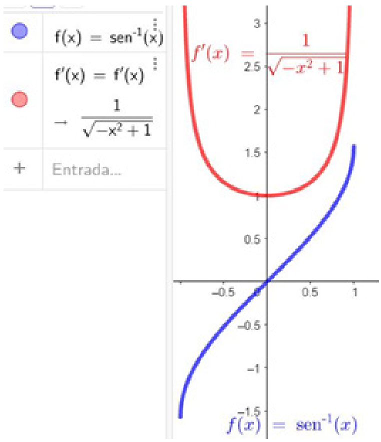


Figura 2. 50 Función f(x)=arcsen(x) y su derivada $f'^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$

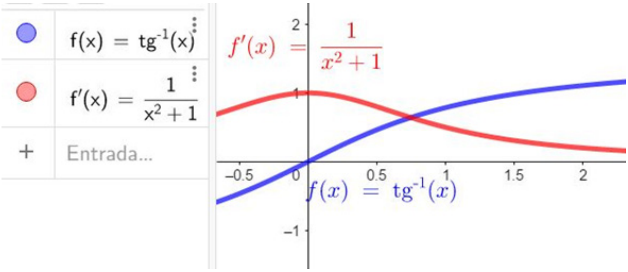


Figura 2. 51 Función f(x)=arctan(x) y su derivada $f'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$

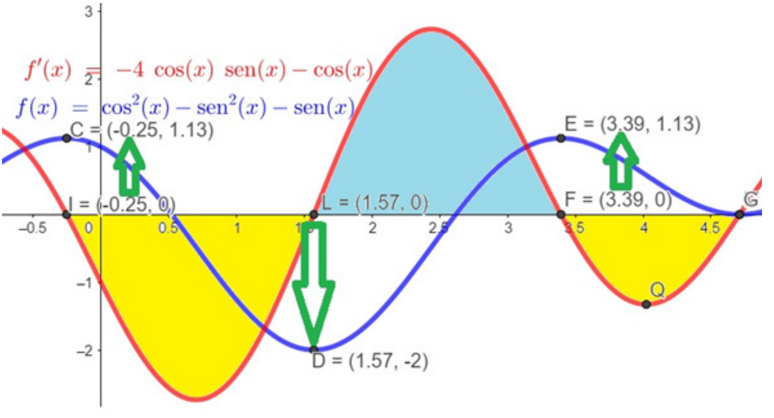


Figura 2. 52 Función y su derivada

En figura 2.52 se muestra el gráfico de la función $f(x)=cos^2(x)-sen^2(x)-sen(x)$ y de su derivada $f'(x)=-4\ cos(x)\ sen(x)-cos(x)$, la primera representada en la gráfica por una curva en color azul y la segunda por una curva en color rojo.

En la gráfica se ha querido destacar las propiedades de la función derivada enunciadas en el tomo I:

a) Si d(x)>0 entonces f es creciente

Se ha coloreado en azul claro el área bajo la curva derivada, correspondiente a los valores positivos de ésta, y se puede observar, que la curva de la función (en azul) es creciente.

b) *Si d(x)=0 entonces en (x, f(x)) hay un extremo de f*

Para los valores en los que la función derivada corta al eje de las abscisas, es decir los puntos donde f^' (x)=0 se corresponde con las abscisas de los puntos donde f(x) (curva en color azul) tiene un valor extremo, es decir toma valores máximos o mínimos relativos.

c) *Si d(x)<0 entonces f es decreciente.*

Coloreado en amarillo el área bajo la curva derivada, correspondiente a los valores negativos de ésta, destaca, que la curva de la función (en azul) es decreciente.

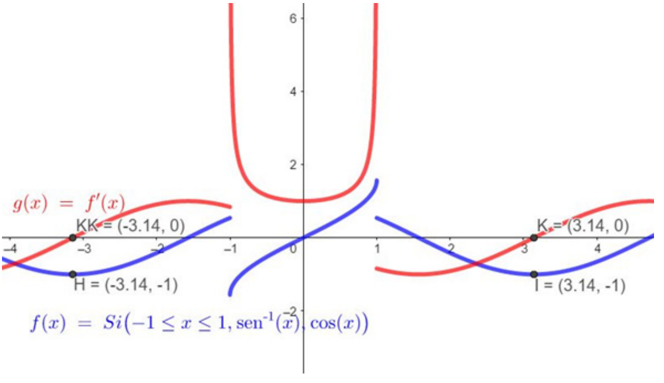


Figura 2. 53 Función definida por partes

En figura 2.53 se muestra una función definida por intervalo (o por partes según otros autores); haga un análisis similar al que se hizo de la figura 2.52 respecto al comportamiento de la función y la función derivada.

Ejercicio 2.7. Utilizando las posibilidades que ofrecen los asistentes matemáticos como el GeoGebra haga un análisis del comportamiento de las siguientes funciones, sus derivadas y sus "puntos especiales".

a. $f(x) = 2arcsen(x) - \cos(2x) - \frac{3}{2}$

b. $g(x) = xsen^2(x) - 1$

c. $f(x) = \frac{sen(x)}{x} + 1$

d. $h(x) = x^2 \cos(x)$

e. $k(x) = \log_{sen(x)}\left(\cos(2x) + 2sen(x)\right) - 2$

f. $h(x) = 9^{sen(x)} - 3^{\sqrt{sen(x)-1}} - 8$

g. $g(x) = 2e^{-x}sen(2x) - 1$

h. $f(x) = 2\ln(x) - sen(x)$

i. $h(x) = e^{arcsen(x)} + e^{sen(x)} - 3$

j. $g(x) = \log_{\tan(x)} x - 2\cos(2x)$

k. $\mathrm{f(x)} = \cos(\log_2 x) - \mathrm{sen}(\log_2 x)$

2.10. Coordenadas polares

Las coordenadas polares o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia (r) y un ángulo (ϕ). Este sistema es ampliamente utilizado en matemática física y muy especialmente en la construcción de gráficas.

De manera más precisa, como sistema de referencia se toma:

» Un punto O del plano, al que se llama origen o polo.

» Una recta dirigida (o rayo, o segmento OL) que pasa por O, llamada eje polar (equivalente al eje x del sistema cartesiano).

Con este sistema de referencia y una unidad de medida métrica (para poder asignar distancias entre cada par de puntos del plano), todo punto P del plano corresponde a un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de P al origen y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP que va de O a P.

El valor θ crece en sentido antihorario y decrece en sentido horario.

La distancia r ($r \geq 0$) se conoce como la «coordenada radial» o «radio vector», mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».

GeoGebra muestra el sistema de coordenadas rectangulares en forma implícita, pero puede presentar el sistema polar mediante el menú de opciones que se muestra en figura 2.54.

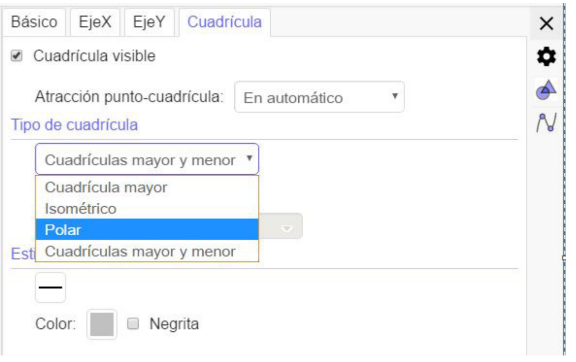


Figura 2. 54 Para seleccionar el sistema de coordenadas a utilizar

Una vez seleccionado el sistema de coordenadas a utilizar la pantalla gráfica del GeoGebra se transforma en un sistema de coordenadas polares Figura 2.55.

En coordenadas polares las funciones trigonométricas juegan un papel fundamental, porque entre otras cosas ellas permiten generalmente simplificar las fórmulas asociadas a cada curva.

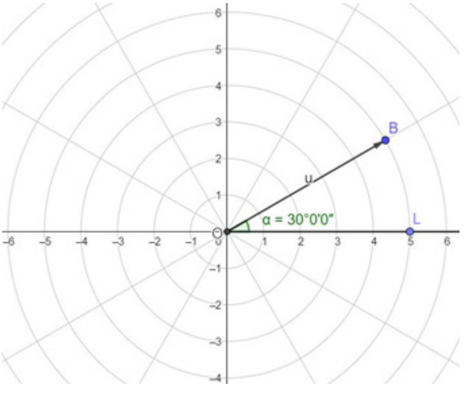


Figura 2. 55 Sistema de coordenadas polares presentado por GeoGebra

Ejemplo:

La curva llamada Lemniscata de Bernoulli tiene por ecuación en coordenadas cartesiana la siguiente expresión:

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

Para a=2 el gráfico y ecuación de la curva se muestran en la figura 2.56.

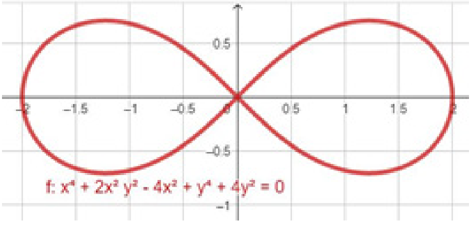


Figura 2. 56 Lemniscata de Bernoulli en coordenadas cartesianas

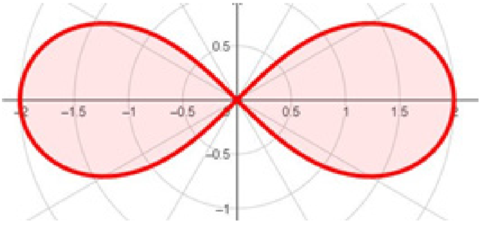


Figura 2. 57 Lemniscata de Bernoulli en coordenadas polares

La misma curva en coordenadas polares se obtiene mediante la fórmula

$r^2=a^2 \cos(2\theta)$ y para el caso a=2 se tiene $r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$

Otras curvas interesantes se muestran a continuación:

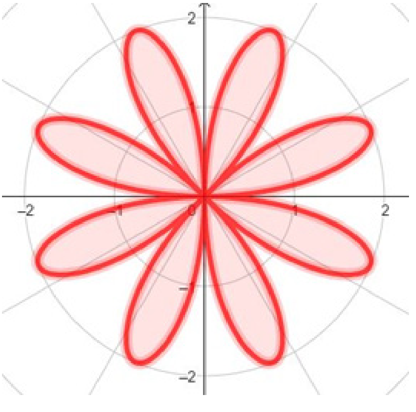


Figura 2. 58 Rosa polar de fórmula r=2sen(4θ)

Rosa polar de ecuación $r=2\text{sen}(4\theta)$

Rosa polar es el nombre que recibe cualquier miembro de una familia de curvas de ecuación $r=\cos(k\theta)$por asemejarse a una flor de pétalos.

La que se presenta en figura 2.58 tiene la particularidad de que su área es la mitad del área del círculo donde está inscrita, es decir:

$$A_R = \frac{2^2\pi}{2} = 2\pi\ u^2$$

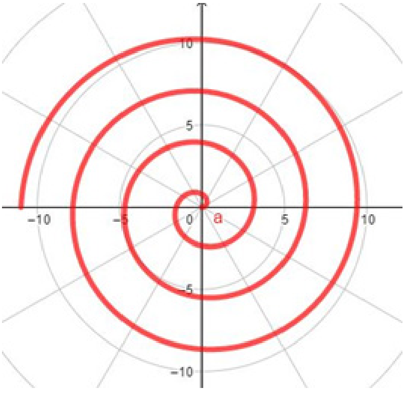


Figura 2. 59 Espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes (también espiral aritmética) Se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante y puede ser descrita por la ecuación polar r=a+bθ, siendo

$$r \geq 0; a, b \in \mathbb{R}\ y\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Figura 2. 60 Luigi Guido Grandi

PINCELADA HISTÓRICA

Luigi Guido Grandi (1 de octubre de 1671 - 4 de julio de 1742) monje de la Orden de la Camáldula; sacerdote, filósofo, matemático, e ingeniero italiano; estudió las curvas sobre una superficie esférica y la familia rhodoneas (del griego rhodon, rosa), escribiendo alrededor de 1725 un libro titulado Flores Geometrici. La reputación de Grandi lo llevó al cargo de matemático de la corte del Gran Duque de Toscana; también trabajó como ingeniero Superintendente de Aguas del Ducado, acometiendo el drenaje del Valle de Chiana. Visitó Inglaterra en 1709, donde fue elegido miembro de la Royal Society. La Uni-versidad de Pisa le nombró profesor de matemáticas en 1714.

Cuando el parámetro a cambia, la espiral gira, mientras que b controla la distancia en giros sucesivos.

Arquímedes describió esta espiral dos siglos antes de nuestra era en su libro De las Espirales compuesta de 28 proposiciones y es uno de los primeros ejemplos en los que un matemático griego define una curva mecánica (una curva trazada por un punto en movimiento)

La espiral de Arquímedes tiene múltiples aplicaciones:

» En las bombas de compresión o compresores rotativos (scroll pumps), hechos de dos espirales de Arquímedes del mismo tamaño intercaladas, para comprimir líquidos y gases. Este es un mecanismo que se utiliza en máquinas de aire acondicionado con bajas emisiones de ruido.

» Los surcos de las primeras grabaciones para gramófonos (Disco de vinilo).

» Pedirle a un paciente que dibuje una espiral de Arquímedes es una manera de cuantificar el temblor humano; esta información ayuda en el diagnóstico de enfermedades neurológicas. Se usan en sistemas DLP (Digital Light Processing (en español “Procesamiento Digital de Luz”)), tecnología usada en proyectores y televisores, en ellos la espiral de Arquímedes minimiza el efecto de arcoíris, que simula un despliegue de varios colores al mismo tiempo, cuando en realidad se proyectan ciclos de rojo, verde y azul rápidamente.

» Existe un método para trisectar ángulos basado en el uso de esta espiral.

Figura 2. 61 Tomado de Falconí Asanza, A., Hernán-dez Crespo, Franco, F. M., & López Fernández, Raúl. (2020). Matemática en Espiral

Existen varios tipos de espirales con sus correspondientes ecuaciones polares y algoritmos de construcción; para más información ver el libro “Matemática en espiral” (Falconí Asanza, A., Hernández Crespo, Franco, F. M., & López Fernández, Raúl. (2020). Matemática en Espiral. Editorial Universo Sur y Universidad Metropolitana de Ecuador.)

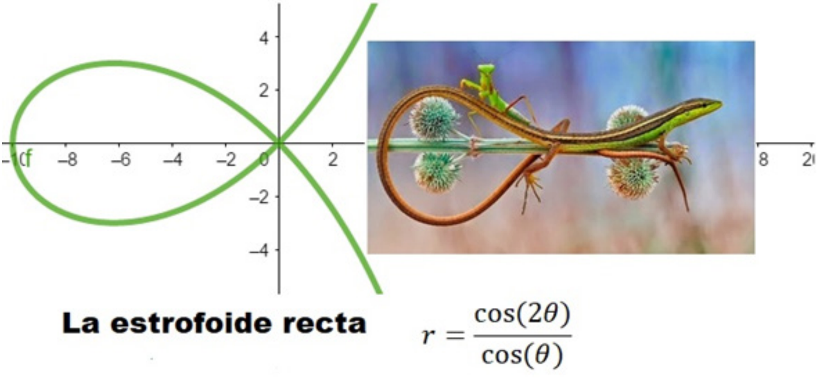


Figura 2. 62 “La naturaleza es un libro abierto escrito en lenguaje matemático” Galileo Galilei

Ejercicio 2.8. Utilizando las posibilidades que ofrecen los asistentes matemáticos como el GeoGebra descubra las gráficas que se esconden tras las siguientes ecuaciones. Le sugerimos que si utiliza el GeoGebra asigne el parámetro “a” a un deslizador y active la opción “animación” del deslizador y “mostrar rastro” de la función; con estas opciones activadas podrá generar “gráficos artísticos” como el de la figura 22.63.

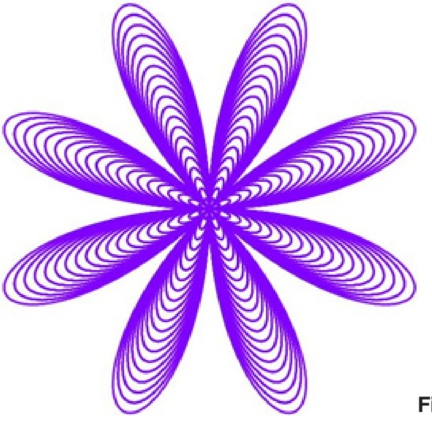


Figura 2. 63 “gráfico artístico”

a. $r = 2a\tan(\theta)\,sen(\theta)$ (cisoide)

b. $r^2 = a^2\theta$ (espiral parabólica)

c. $\log(r) = a^{\theta}$ (espiral logarítmica o equiángula)

d. $r = (1 + sen(\theta))$ (cardiode)

e. $r = a\,sen(3\theta)$ (rosa de tres pétalos)

f. $r = \frac{a}{2}(4\cos(\theta) - \sec(\theta))$ (Trisectriz de Maclaurin)

g. $r = 2a\cos(\theta) + h$ (caracol de Pascal)

2.11. Funciones trigonométricas sistemas ecuaciones paramétricas

Recibe el nombre de sistema de ecuaciones paramétricas, un conjunto de ecuaciones que permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio, recurriendo a valores que recorren un intervalo de números reales, mediante una variable, llamada parámetro, considerando cada coordenada de un punto correspondiente a la curva como una función dependiente del referido parámetro.

Ejemplo:

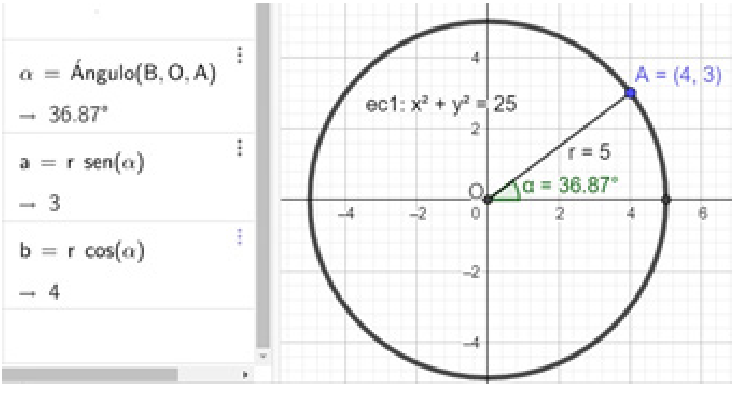


Figura 2. 64 Circunferencia de centro (0,0) y radio r = 5

En Figura 2.64 se tiene una circunferencia de centro en origen y radio r=5, definida por la ecuación $x^2+y^2=25$ y cualquier punto de la circunferencia como A=(4,3) satisface esa ecuación; pero por los conocimiento de coordenadas polares se sabe que cualquier punto de la circunferencia cumple las siguientes condiciones $x=r\cos(\alpha);y=r\,sen(\alpha)$.

Para el caso particular de la circunferencia $x^2+y^2=25$ se tiene ahora el siguiente sistema $\begin{cases} x = 5\cos(\alpha) \\ y = 5\,sen(\alpha) \end{cases}$ $con\ 0 \le \alpha \le 2\pi$ mediante el cual también se pueden determinar los puntos de la circunferencia que se estudia, pero ahora el cálculo de los puntos de la curva depende del parámetro, α que varía en el intervalo $0\le\alpha\le2\pi$

Para ecuaciones paramétricas GeoGebra tiene el comando Curva cuya sintaxis se muestra en Figura 2.65 tomando como ejemplo la expresión paramétrica de la ecuación de la circunferencia.

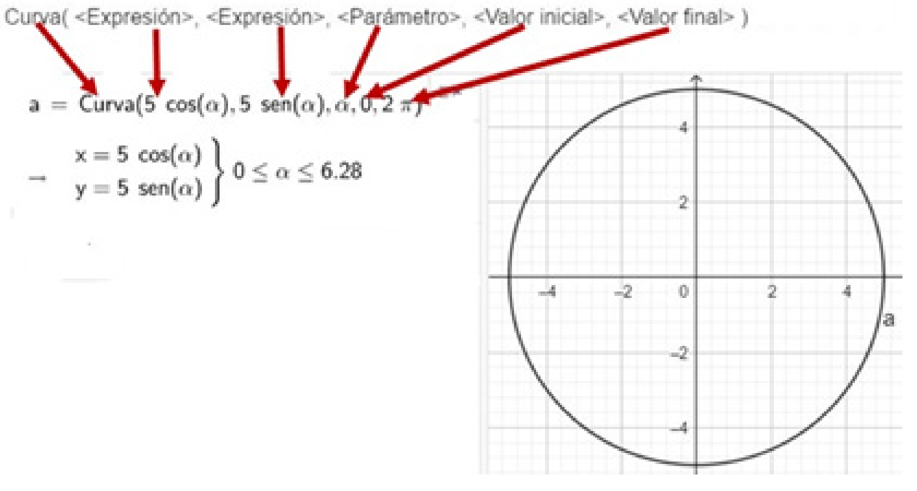


Figura 2. 65 Sintaxis del comando Curva de GeoGebra

La Bruja de Agnesi (se pronuncia 'añesi') es una curva abierta que se construye según el siguiente algoritmo:

I. Se tiene una circunferencia cualquiera.

II. Sean O y T dos puntos diametralmente opuestos sobre la circunferencia.

III. Sea otro punto cualquiera A de la referida circunferencia, tal que la prolongación de la línea secante OA corta en B a la perpendicular a OT que pasa por T.

IV. Trazar dos líneas: una paralela a OT que pase por B, y otra perpendicular a OT que pase por A, las cuales se cortarán en P.

V. Tomando como variable el punto A, se define el conjunto de puntos P pertenecientes a la curva buscada.

La ecuación paramétrica de esta curva (Figura 2.66) es:

$$\begin{cases} x = 2a\cot(\alpha) \\ y = 2a\,sen^2(\alpha) \end{cases}$$

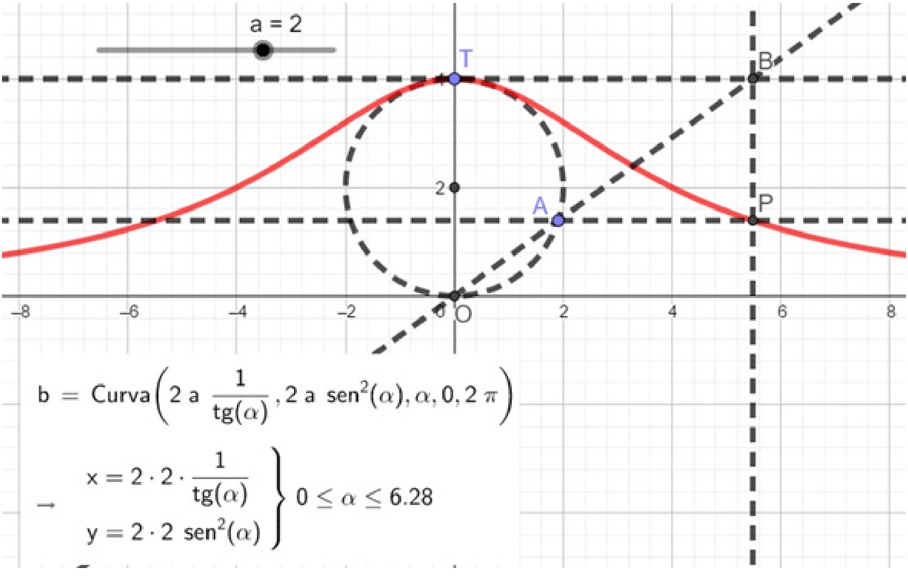


Figura 2. 66 Bruja de Agnesi

PINCELADA HISTÓRICA

María Gaetana Agnesi (1718-1799) fue una matemática italiana cuya obra más importante, Instituciones Analíticas, se tradujo a varios idiomas y fue utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el

Figura 2. 67

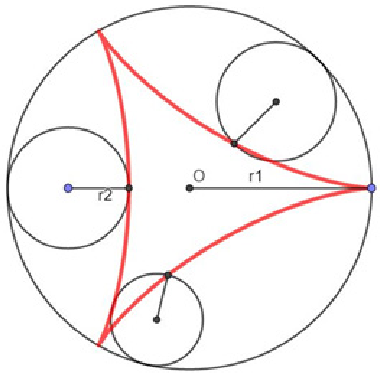
María Gaetana Agnesi (1718-1799)

Cálculo Diferencial e Integral; pero su reputación histórica fue distorsionada por un error de traducción, porque en sus Instituzioni Analitiche, trabajaba con la “curva de Agnesi” o curva sinusoidal versa, “versiera” en italiano, que significa “virar”, “girar”, palabra que se tradujo al inglés, por un error del traductor, John Colson, como la “bruja de Agnesi”.

Colson, era un respetado profesor de Cambridge y consideró que este trabajo era extraordinario, por lo que, a una edad que superaba los 75 años, decidió aprender italiano con el único fin de traducir ese libro, con la buena intención de que la juventud inglesa pudiera beneficiarse de él, como lo hacían los jóvenes de Italia. La traducción al inglés se terminó hacia 1760, el año de la muerte de Colson, pero en su trabajo confundió el término “versiera” por “avversiera” que en inglés significa bruja, hechicera, (“witch”) y así lo tradujo. Posteriores traducciones y ediciones han mantenido el término. Quizás con mala intención o pretendiendo hacer un chiste sin gracia, quedando así inmortalizada en los libros de historia de la matemática y los autores de este libro seguimos la tradición.

Esta curva, fue discutida por Fermat en 1703 y se ha establecido recientemente que es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos, así como de la potencia disipada en los circuitos de alta frecuencia de resonancia y en Estadística, la distribución de Cauchy de una variable aleatoria se expresa mediante una bruja de Agnesi.

La hipocicloide es otra curva interesante generada por la trayectoria descrita por un punto situado sobre una circunferencia generatriz que rueda sin deslizar por el interior de otra circunferencia directriz, sin deslizamiento.



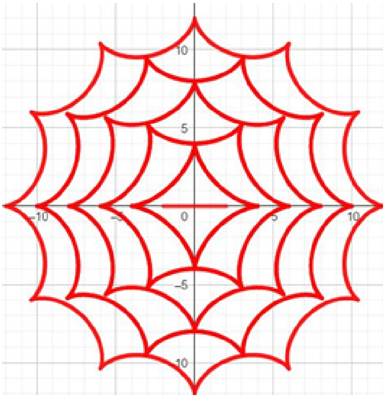


Figura 2. 68 En dependencia de la relación k=$\frac{r_1}{r_2}$ se obtienen diferentes hipocicloides. Las de las figuras del interior al exterior toman los valores 0,3,4,5,6,7.

Las ecuaciones generales de la hipocicloide son:

$$x = (r_1 - r_2)\cos(\alpha) + r_2 cos\left[\alpha\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right]$$

$$x = (r_1 - r_2)\,\mathrm{sen}(\alpha) + r_2 sen\left[\alpha\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right]$$

Ejercicio 2.9. Graficar las siguientes funciones dadas en forma paramétrica.

Ejercicio 2.10.

a) $\begin{cases} x = sen(t + sen(t)) \\ y = \cos\,(t + \cos(t)) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \cos\,(t) \\ y = tan^{-1}(t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \cos(\pi\, t) \\ y = sen\,(\pi\, t) \end{cases} 0 \le t \le 1$

d) $\begin{cases} x = 1 + \tan\,(t) \\ y = \cos\,(2t) \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = a(\cos(\theta) - cos^2(\theta)) \\ y = a(sen(\theta) - sen(\theta)\cos\,(\theta)) \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2\cos(\alpha) - \cos\,(2\alpha) \\ y = 2sen(\alpha) - sen(2\alpha) \end{cases}$

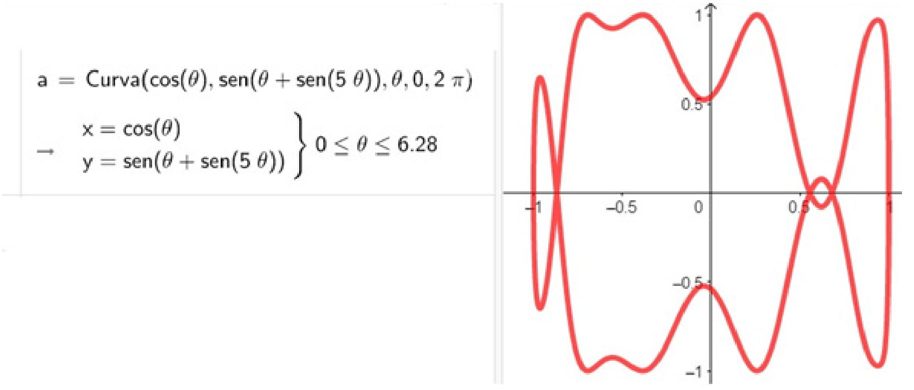
g) $\begin{cases} x = a\,sec(\theta) + b\tan\,(\theta) \\ y = c\,sec(\theta) + d\tan\,(\theta) \end{cases} con\ ad \neq bc$

h) $\begin{cases} x = a\tan\,(\alpha) \\ y = b\,sec^2(\alpha) \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = b\,csc^2(\alpha) \\ y = a\cot\,(\alpha) \end{cases}$

j) $\begin{cases} x = \tan(\varphi) + \sec\,(\varphi) \\ y = \tan(\varphi) - \sec\,(\varphi) \end{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Por la curiosidad el gráfico un tanto inesperado, hemos querido añadir la siguiente ecuación paramétrica, le sugerimos que lo repita con su asistente matemático.



2.12. Funciones trigonométricas en curvas en el espacio.

Como una generalización de las ecuaciones paramétricas presentaremos algunos ejemplos de curvas en el espacio, que se rigen por los mismos principios añadiendo ahora la coordenada z expresada en función del parámetro seleccionado.

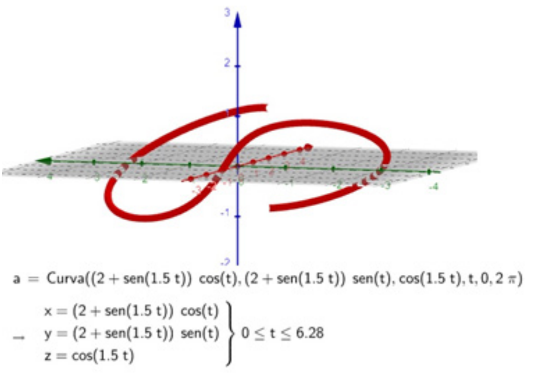


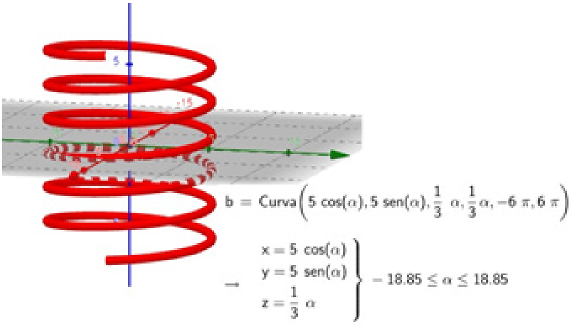
Figura 2. 69 Curva nudo de trébol

Indudablemente que estas curvas resultan más complejas de obtener, no sólo porque tienen más parámetros, sino también porque se necesita buscar la vista adecuada de su presentación.

Dentro de estas curvas resultan de particular interés las hélices que tienen ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega t) \\ y = \varepsilon r\, sen(\omega t) \\ z = kt \end{cases}$$

Donde r es el radio de giro de la espiral, ω es el ángulo girado por unidad de tiempo, t es el tiempo y k es el avance en el sentido de z por una unidad de tiempo, ε=±1 según el sentido sea en el de las manecillas del reloj o contrario a éste



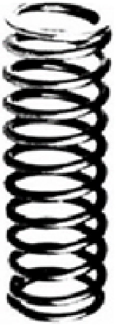


Figura 2. 70 Hélices

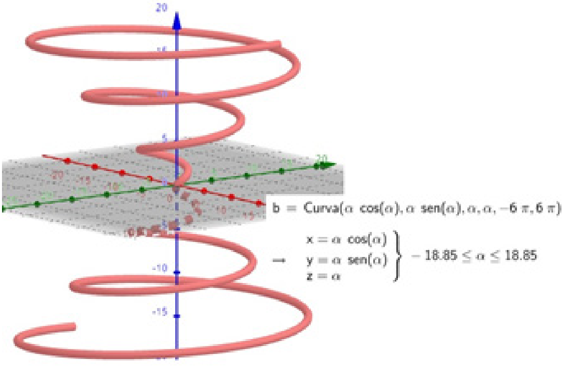


Figura 2. 72 Hélices cónicas

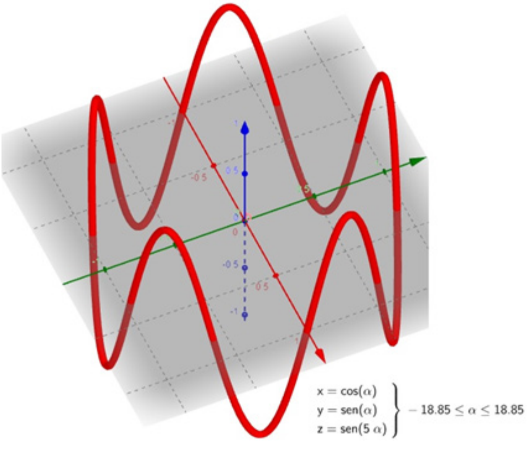


Figura 2. 71

CAPÍTULO III.
FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

Las funciones hiperbólicas poseen propiedades similares a las cuadráticas, con la diferencia de presentar una mayor dificultad en la realización de su ajuste. La productividad marginal es creciente y luego decreciente para un solo input variable.

Aspilcueta et al., (2008) estudia una función hiperbólica lineal para predecir la producción diaria de leche en vacas con alto grado de sangre Brown Swiss…

Cynthia Reyes

Modelos econométricos para el desarrollo de funciones de producción

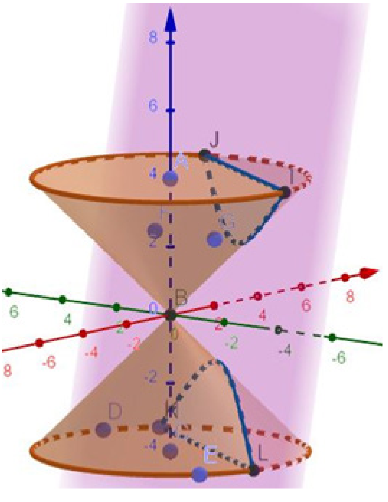


Figura 3. 1 Hipérbola generada por el corte de un plano paralelo a dos de sus generatrices.

3.1. Definición y ecuaciones de la hipérbola.

Definición 1:

Una hipérbola (del griego ὑπερβολή) es una curva abierta de dos ramas obtenida cortando un cono recto por un plano oblicuo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución

Definición 2:

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva.

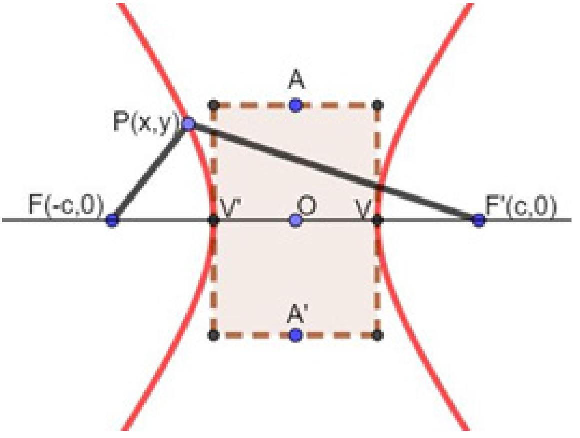


Figura 3. 2 Hipérbola

En figura 3.2 se muestra una elipse trazada según la definición 2, con centro en el origen de coordenadas y los focos F y F' situados sobre el eje de abscisas; por eso como el centro O está en el origen de coordenadas, las coordenadas de los focos son (-c,0) y (c,0) respectivamente, siendo c una constante positiva, por lo que el segmento. $\overline{FF'} = 2c$. Sea P(x,y) un punto cualquiera de la hipérbola, entonces por definición 2 este punto satisface la definición de lugar geométrico que expresa que la diferencia de las distancias del punto P a los focos es una cantidad constante que designaremos por 2a, manitud que coincide con la distancia entre los vértices: $\overline{VV'} = 2a$. , es decir que: $|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a$ (1) siendo 2a<2c. La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones:

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (2)$$

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = -2a \qquad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola y la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha:

Por distancia entre dos puntos se tiene:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,\ |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

De lo anterior se infiere que la relación (1) queda expresada ahora como:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \qquad (5)$$

Transformando (4) se tiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2=4a^2+4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)+x^2+2cx+c^2$$

$$-4cx-4a^2=4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)$$

$$(cx+a^2)^2=\left(a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)\right)^2$$

$$c^2x^2+2ca^2x+a^4=a^2x^2+2ca^2x+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (6)$$

Por ser $c>a$ se tiene que $c^2-a^2>0$ designaremos por $b^2=c^2-a^2$ (7)

Con la condición de que: $\overline{AA'}=2b$.

Sustituyendo en (6) se tiene:

$b^2 x^2-a^2 y^2=a^2 b^2$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

La ecuación (8) es la ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de abscisas.

Igual resultado se tiene al desarrollar (5)

Despejando y en (8) se tiene:

$$y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow (x-a)(x+a) \geq 0 \Rightarrow x \geq a; x \leq -a$$

Luego en el intervalo -a<x<a no está definida la hipérbola, (no existe curva en ese intervalo).

Al igual que en las demás cónicas se define la excentricidad “e” como la relación entre “c” y “a”: $e = \frac{c}{a}$ en este caso se tiene: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c} > 1$ por ser c>a

Cuando el eje focal coincide con el eje de ordenadas la ecuación adopta la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

Más general cuando el centro de la hipérbola está situado en un punto cualquiera de coordenadas (h,k) las ecuaciones (8) y (9) adoptan la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

Cuando dos hipérbolas cumplen la condición de que el eje transverso de una es igual al eje conjugado de la otra se dicen que son conjugadas y sus ecuaciones respectivas son del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

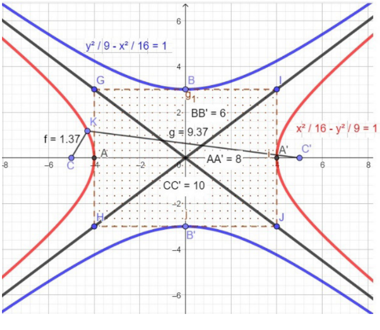


Figura 3. 3 Hipérbolas conjugadas

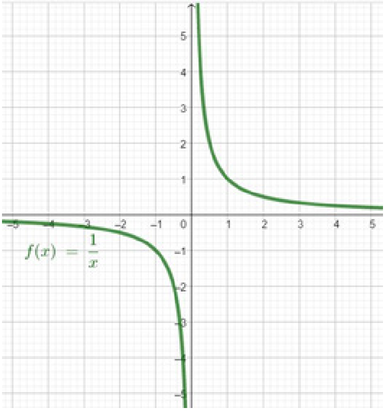


Figura 3. 4 Hipérbola equilátera

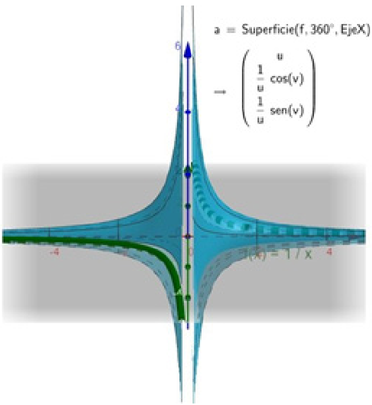


Figura 3. 5 Hiperboloide de revolución de hipérbola equilátera

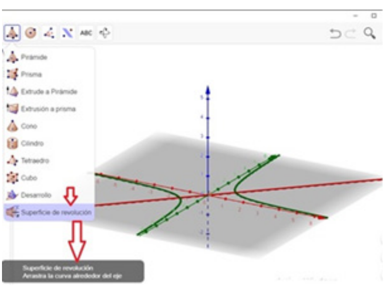


Figura 3. 6 Esquema para general cuerpos de revolución con GeoGebra

En Figura 3.3 se muestran dos hipérbolas conjugadas, observe la relación

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

La hipérbola equilátera o rectangular tiene la particularidad de que sus ejes transversos y conjugados son de igual longitud, es decir: a=b y tiene como forma particular más simple expresiones del tipo: $xy = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$

En figura 3.4 se muestra el caso en el k=1. Observe que los ejes de coordenadas son las asíntotas de la hipérbola.

A partir de la hipérbola equilátera mediante GeoGebra es posible obtener un interesante hiperboloide de revolución; superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes de simetría. Dependiendo del eje elegido, el hiperboloide puede ser de una o dos hojas.

Según Mauricio Luzuriaga

Uno de los más peculiares proyectos de *hypars*[9] en el país (Ecuador) se encuentra en Déleg, provincia del Cañar. Se trata de la Iglesia Cristo del Consuelo, iniciada en 1975. Es diseñada, calculada y construida por el ingeniero Luis Monsalve. Formalmente, el templo de Déleg presenta 5 mantos que convergen y se empinan hacia su centro geométrico. Monsalve, confeso

[9] **Hypar**. Abreviatura del inglés de *hyperbolic paraboloid (paraboloide hiperbólico)*

Figura 3. 7 Interior de la Iglesia Cristo del Consuelo

seguidor de la obra de Candela, si a mano viene, se inspiró en la Capilla San Vicente de Paul en Coyoacan-Ciudad de Mexico de 1958, de los arquitectos Enrique de la Mora y Félix Candela, misma que presenta tres mantos en similar disposición. (Luzuriaga, 2020)

Forma polar de la ecuación de la hipérbola $r^2 = a\,sec(2\theta)$ Figura 3.8.

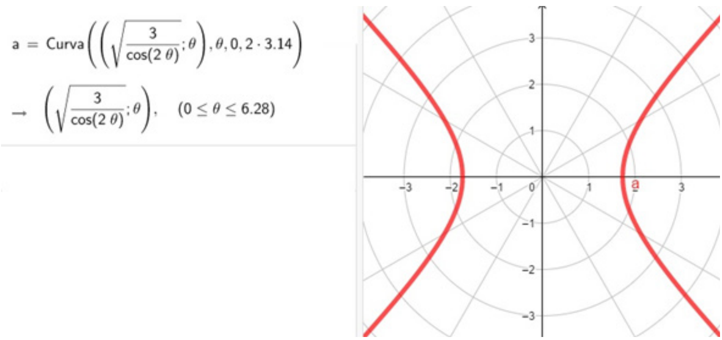


Figura 3. 8 Forma polar de la ecuación de la Hipérbola

Las formas paramétricas de la ecuación de la hipérbola son:

Hipérbola abierta de derecha a izquierda:

$$\begin{cases} x = a\sec(t) + h \\ y = b\tan(t) + k \end{cases}$$

Hipérbola abierta de arriba hacia abajo:

$$\begin{cases} x = a\tan(t) + h \\ y = b\sec(t) + k \end{cases}$$

En ambas fórmulas (h,k) son las coordenadas del centro de la hipérbola, a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor

Figura 3.9.

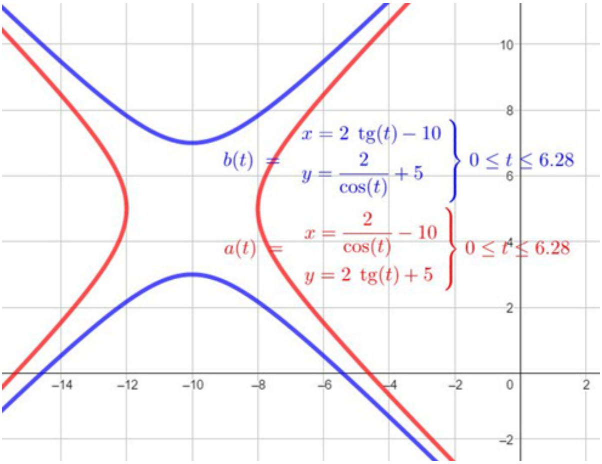


Figura 3. 9 Hipérbolas en forma paramétrica

Ejercicio 3.1. Dada las ecuaciones de las hipérbolas:

$2y^2-7x^2=14$

$x^2-9y^2-4x++36y41=0$

Trazar sus gráficos y los hiperboloides de revolución de cada una alrededor de los ejes de abscisas y ordenadas.

Figura 3. 10 Apolonio de Pergas

PINCELADA HISTÓRICA

Aunque el descubrimiento de las cónicas se atribuye a Menecmo (ca. 380 - ca. 320 a. C.), lo cierto es que el primer tratado con ese nombre se debe a Apolonio de Pergas, apodado el *gran geómetra*. suele darse como año de nacimiento el 262 a.C., y el 190 a.C. como el de su muerte. Por sus trabajos se sabe que Apolonio se trasladó a Alejandría, en cuyo Museo estudió y trabajó con los sucesores de Euclides durante bastantes años; también residió Apolonio en Éfeso, pero donde ultimó su obra más importante, el *Tratado de las Cónicas*, y donde permaneció viviendo hasta su muerte, fue en Pérgamo, ciudad situada en el Asia Menor en la que existía una biblioteca y museo creadas a imagen y semejanza de las de Alejandría.

La obra sobre las cónicas constaba de ocho libros de los que siete han nosotros, en ellos sistematiza y generaliza los conocimientos anteriores sobre las secciones cónicas, al tiempo que introduce una visión totalmente nueva de estas curvas que se proyecta al futuro y es que Indudablemente, en la obra de Apolonio se esbozan ideas que después se convirtieron en la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, analizando sus libros se encuentra un estudio de las cónicas muy avanzado para su tiempo:

Libro I: en él se plantea la construcción de las cónicas a partir de un único cono y en él explica el significado de los nombres de Elipse, Parábola e Hipérbola – procedentes del lenguaje pitagórico de la Aplicación de las Áreas– al obtener las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes, en forma de proporción, que daban retóricamente la propiedad característica de la curva, que en el devenir geométrico Fermat convertiría en la *propiedad específica* de la curva, definida por su ecuación, esto es posible porque evadiendo toda referencia al cono generador, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que jugando un papel de coordenadas, asocia a la curva, de modo que mediante Álgebra retórica expresa en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugar geométrico. Con un instrumento parejo a las coordenadas, Apolonio descubrió los puntos y las rectas notables de las cónicas y describió casi todas sus propiedades importantes. El libro II: estudia las asíntotas de la hipérbola.

Libro III: estudia las propiedades de las tangentes y de los focos que permiten trazar las curvas por composición de movimientos y sirven para definirlas *como lugares geométricos.*

Libro IV: estudia la intersección de cónicas.

Libro V estudia los *segmentos máximos y mínimos* –las rectas normales–.

Libro VI se dedica a estudiar la igualdad y semejanza de cónicas.

Libro VII estudia relaciones métricas sobre diámetros conjugados.

3.2. Propiedades de la hipérbola

Definiciones preliminares

» Secante de la hipérbola: toda recta que corta a la hipérbola en dos puntos.

» Cuerda de la hipérbola: Segmento de secante limitado por los puntos de la hipérbola.

» Tipos de secantes y cuerdas:

- Secante/cuerda de primer género: cuando cortan una sola rama de la hipérbola.
- Secante/cuerda de segundo género: cuando cortan a ambas ramas de la hipérbola.

» Tangentes a la hipérbola: Si se observa en Figura 3.11 entre las rectas paralelas a secantes de primer género existen las que cortan a la hipérbola en dos puntos, las que no la cortan y hay dos rectas paralelas que cortan a la hipérbola llamadas tangentes a la hipérbola que solo tienen un punto común con la hipérbola. También una tangente a la hipérbola se define como una recta que tiene con la hipérbola un punto en común y no es paralela a la asíntota, esta distinción se hace porque toda recta paralela a la asíntota corta a la hipérbola en un solo punto, pero no es una tangente a la hipérbola.

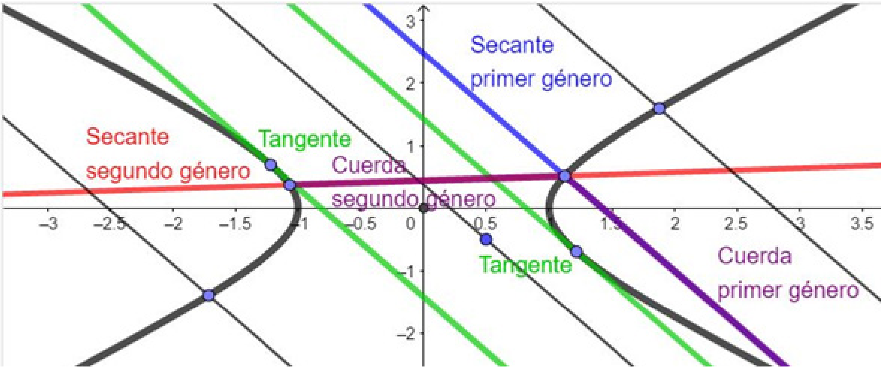


Figura 3. 11 Secantes, cuerdas y tangentes a la hipérbola

Propiedad # 1:

El segmento de tangente a la hipérbola, encerrado entre asíntotas por la curva, se divide por el punto de tangencia en dos partes iguales.

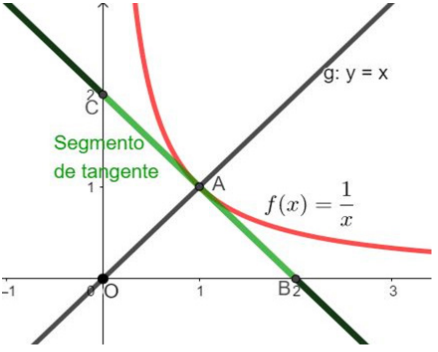


Figura 3. 12 Gráfico asociado a propiedad # 1

La bisectriz g del ángulo de coordenadas sirve de eje de simetría de la hipérbola (Figura 3.12) el segmento $\overline{BC}$ de la tangente en el vértice A encerrado entre los ejes de coordenadas se divide por el punto A por la mitad, de manera que los segmentos $\overline{AB}$ y AC son simétricos respecto al eje g

Propiedad # 2

Las áreas de los triángulos, que se obtienen al cortar el ángulo de coordenadas por tangentes a la hipérbola xy=a, son todas iguales.

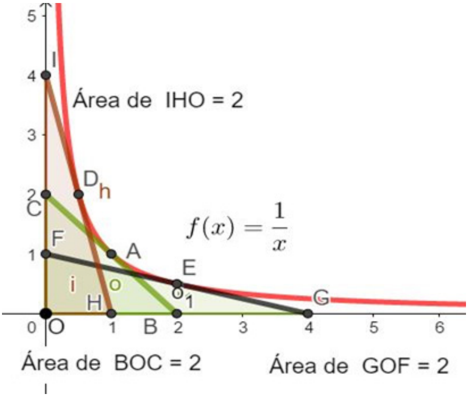


Figura 3. 13 Gráfico asociado a la propiedad # 2

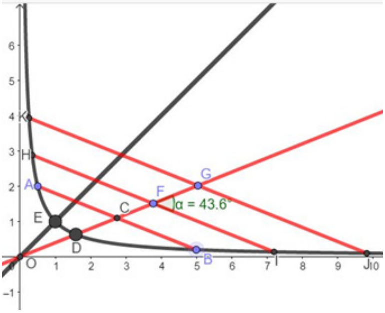


Figura 3. 14 Gráfico asociado a la propiedad # 3

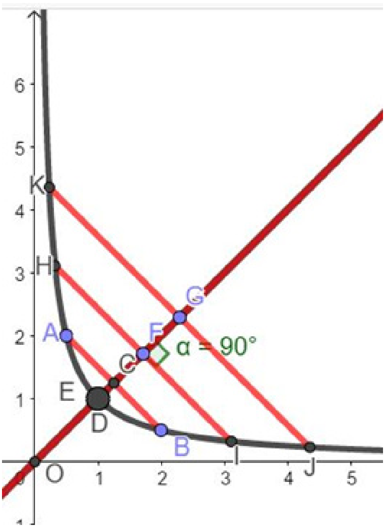


Figura 3. 15 Gráfico asociado a la propiedad # 3

En Figura 3.13 se muestran tres triángulos que se obtienen al cortar el ángulo de coordenadas por tangentes a la hipérbola xy=a, en particular la hipérbola xy=1, pero la propiedad es válida para cualquier a y como se muestra en la gráfica las áreas de cada triángulo calculadas mediante el GeoGebra son iguales a 2u^2, pero si esto no bastara y se exigiera una demostración general, basta con calcular el área del triángulo BOC de la Figura 3.12, $\acute{A}rea_{\Delta BOC} = \frac{2\times 2}{2} = 2u^2$; luego, el giro hiperbólico del punto A hacia los puntos D y E no permite que el área de la figura original cambie su valor.

Propiedad # 3

Los centros de todas las cuerdas paralelas de la hipérbola se ubican en una recta que pasa por el punto medio de la hipérbola.

Sea $\overline{AB}$, una cuerda cualquiera de la hipérbola;

C centro de la cuerda.

D punto de intersección de la recta OC con la hipérbola (Figura 3.14)

Si se realiza un giro hiperbólico que convierta el punto D en el vértice E de la hipérbola, como se muestra en Figura 3.15 entonces la recta OC se transforma en el eje de la hipérbola, mientras la cuerda $\overline{AB}$ adopta una

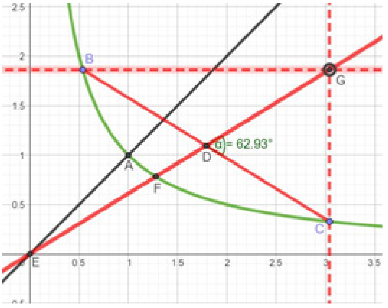


Figura 3. 16 Gráfico asociado a la propiedad # 4

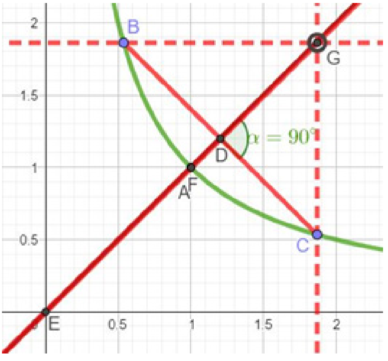


Figura 3. 17 Gráfico asociado a la propiedad # 4

posición que queda dividida en dos partes iguales por el eje de la hipérbola. Observe que esto es posible cuando las cuerdas son perpendiculares al eje de simetría de la hipérbola. Con esta transformación todas las cuerdas paralelas a $\overline{AB}$ se transforman en cuerdas perpendiculares al eje de la hipérbola.

De lo anterior surge el concepto de *diámetro de la hipérbola* que es la recta que pasa por el centro de la hipérbola. El diámetro de la hipérbola que divide por la mitad a todas las cuerdas de una dirección dada se denomina *diámetro conjugado* con estas últimas e inversamente las cuerdas se llaman conjugadas con el diámetro que las divide en dos partes.

Radio de la hipérbola bajo esta denominación se entiende a todo segmento de radio comprendido entre el centro y la intersección del diámetro con la curva.

Propiedad # 4

Las rectas trazadas por los extremos de una cuerda arbitraria de la hipérbola paralelamente a las asíntotas de ésta se cortan en diámetro conjugado con la cuerda.

En las figuras 3.16 y 3.17 se evidencia lo planteado en la propiedad, pero una fundamentación mayor se puede dar, para ello

Sean: $\overline{BC}$ cuerda arbitraria de la hipérbola.

D punto medio de la cuerda.

F punto de intersección de la recta OF con la curva.

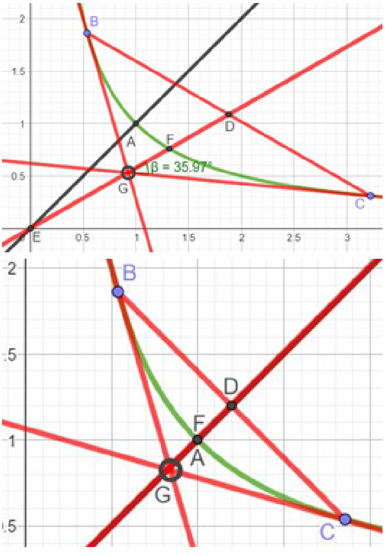


Figura 3. 18 Gráficos asociados a la propiedad # 5

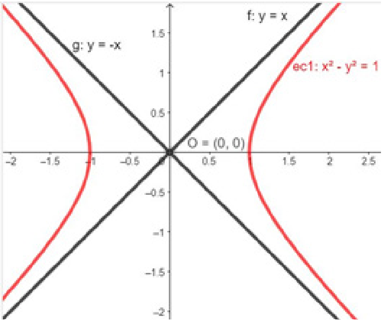


Figura 3. 19 Hipérbola unidad

Hágase el giro hiperbólico que mueve el punto F al vértice A, la cuerda BC se adapta a las nuevas condiciones y pasa a ser perpendicular al eje de la hipérbola y las rectas CG y BG siguen paralelas a las asíntotas, en este caso los ejes de coordenadas. Como el eje de la hipérbola es bisectriz del ángulo formado por las asíntotas, la intersección de las rectas CG y BG se disponen sobre la recta FG.

Propiedad # 5

Las tangentes a la hipérbola en los extremos de una cuerda elegida arbitrariamente, se cortan en el diámetro conjugado con esta cuerda.

Observe que la demostración de esta propiedad sigue el mismo patrón de las demostraciones anteriores y la dejamos a los lectores.

3.3. Funciones hiperbólicas y sus principales propiedades.

En Figura 3.19 se muestra la hipérbola referida a los ejes de coordenadas de ecuación x^2-y^2=1 llamada también hipérbola unidad por analogía con la circunferencia unitaria x^2+y^2=1 empleada en el capítulo I para definir las funciones trigonométricas.

Otros elementos de esta hipérbola son:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = \sqrt{2}$$

Ecuación polar : $r^2 = \sec(2\theta)$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \sec(t) \\ y = \tan(t) \end{cases}$

En Figura 3.20 se muestra la sección derecha de una hipérbola unitaria en la cual se han trazado los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OM}$, los cuales con el arco de hipérbola comprendido entre los puntos A y M determinan un sector (coloreado en amarillo en la gráfica). Al doble del área de ese sector se llama *ángulo hiperbólico t* reorganizando las ideas y precisando definición se tiene que.

Un ángulo hiperbólico t es numéricamente igual al doble del área del sector comprendido entre dos radios de la hipérbola y el arco de hipérbola correspondiente.

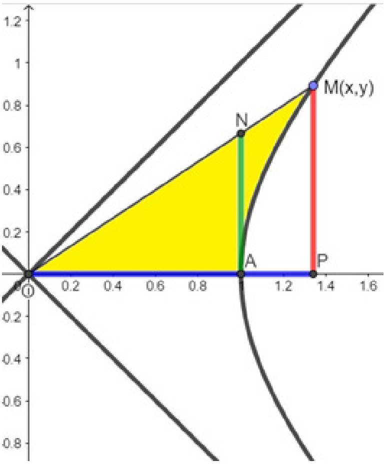


Figura 3. 20 Sección de hipérbola para definir funcione hiperbólicas

En Figura 3.20 se han trazado, además:

» Una perpendicular $\overline{MP}$ del punto M de la hipérbola al diámetro $\overline{OA}$ que el eje de simetría de la hipérbola que la corta en el punto A.

» Una tangente a la hipérbola en el punto A que corta al diámetro $\overline{OM}$ en el punto N

Con estas líneas es posible definir las siguientes líneas de trigonometría hiperbólica análoga a las trigonométricas estudiadas en capítulo II:

Seno hiperbólico ≡El segmento $\overline{PM}$ de la perpendicular.

Coseno hiperbólico ≡ El segmento $\overline{OP}$ del diámetro.

Tangente hiperbólica ≡El segmento $\overline{AN}$ de la tangente a la hipérbola en su vértice.

Obsérvese la analogía con las líneas trigonométricas definidas en el círculo unitario.

Las longitudes de los segmentos $\overline{PM}$, $\overline{OP}$ y $\overline{AN}$ se llaman respectivamente:

» *Seno hiperbólico del ángulo t.*

» *Coseno hiperbólico del ángulo t.*

» *Tangente hiperbólica del ángulo t.*

Designándose por:

senh(t)=PM

cosh(t)=OP

tanh(t)=AN

En base a estas nuevas funciones las ecuaciones paramétricas de la hipérbola se pueden escribir del siguiente modo:

Las formas paramétricas de la ecuación de la hipérbola son:

Hipérbola abierta de derecha a izquierda:

$$\begin{cases} x = \pm a\cosh(t) + h \\ y = b\,\mathrm{senh}(t) + k \end{cases}$$

Hipérbola abierta de arriba hacia abajo:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{senh}\,(t) + h \\ y = b\cosh(t) + k \end{cases}$$

El gráfico de las tres funciones generados con GeoeGebra se muestra en figura:

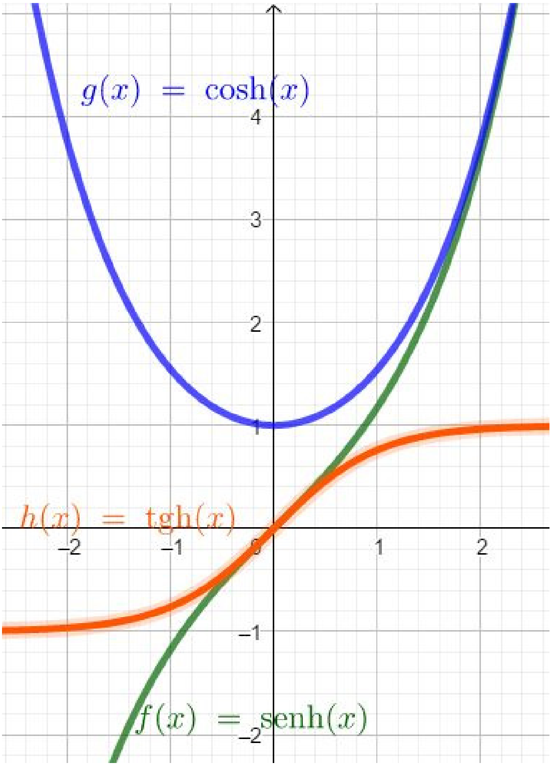
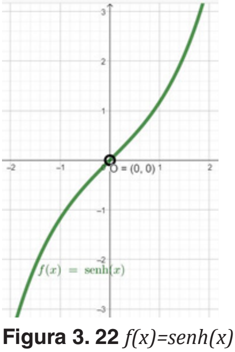


Figura 3. 21 Gráficas de senh(t), cosh(t) tanh(t)

Propiedades de las funciones hiperbólicas definidas

Funciones	Propiedades	Gráfico
Seno hiperbólico *f(x)=senh(x)*	Dominio f: $\mathbb{R}$	 **Figura 3. 22** *f(x)=senh(x)*
	Imagen f: $\mathbb{R}$	
	Acotamiento f: No acotada.	
	Puntos máximo y mínimo: f no tiene puntos de máximo ni mínimo.	
	Periodicidad: f no es periódica.	
	Paridad: f es impar.	
	Monotonía: f es monótona creciente.	
	Puntos de intersección con ejes de coordenadas: f intersecta los ejes de coordenadas en (0,0)	

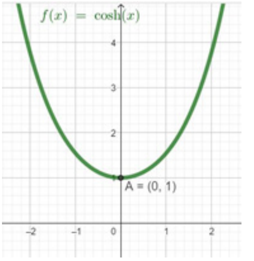
<table>
<tr><td rowspan="8">coseno hiperbólico
f(x)=cosenh(x)</td><td>Dominio f: $\mathbb{R}$</td><td rowspan="8">

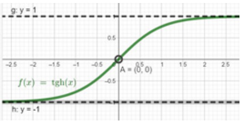
Figura 3. 23
f(x)=cosenh(x)</td></tr>
<tr><td>Imagen f: y∈ $\mathbb{R}$: y≥1</td></tr>
<tr><td>Acotamiento f: acotada inferiormente porque f(x)≥1.</td></tr>
<tr><td>Tiene un punto mínimo para x=0,f(0)=1</td></tr>
<tr><td>Periodicidad: f no es periódica.</td></tr>
<tr><td>Paridad: f es par.</td></tr>
<tr><td>Monotonía: f no es monótona, pero decrece en]-∞,0] y crece en [0,+∞[.</td></tr>
<tr><td>Puntos de intersección con ejes de coordenadas: f intersecta los ejes de coordenadas en (0,1)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">T a n g e n t e hiperbólica
f(x)=tanh(x)</td><td>Dominio f: $\mathbb{R}$</td><td rowspan="8">

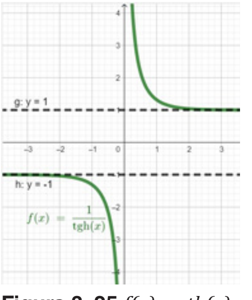
Figura 3. 24 *f(x)=tanh(x)*</td></tr>
<tr><td>Imagen f: y∈ $\mathbb{R}$:y∈ ⊢]-1,1⊣ [</td></tr>
<tr><td>Acotamiento f: está acotada por -1 y 1</td></tr>
<tr><td>Puntos máximo y mínimo: f no tiene puntos de máximo ni mínimo.</td></tr>
<tr><td>Periodicidad: f no es periódica.</td></tr>
<tr><td>Paridad: f es impar.</td></tr>
<tr><td>Monotonía: f es monótona creciente.</td></tr>
<tr><td>Puntos de intersección con ejes de coordenadas: f intersecta los ejes de coordenadas en (0,0)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">C o t a n g e n t e hiperbólica
f(x)=coth(x)</td><td>Dominio f: $\mathbb{R}$\{0}</td><td rowspan="8">

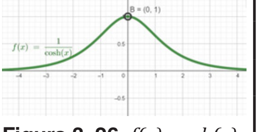
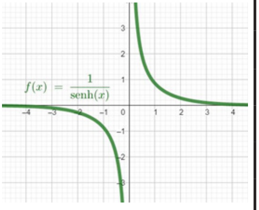
Figura 3. 25 *f(x)=coth(x)*</td></tr>
<tr><td>Imagen f: {y∈$\mathbb{R}$: y<-1 ∧y>1}</td></tr>
<tr><td>Acotamiento f: no está acotada</td></tr>
<tr><td>No tiene ni máximo ni mínimo.</td></tr>
<tr><td>Periodicidad: f no es periódica.</td></tr>
<tr><td>Paridad: f es impar.</td></tr>
<tr><td>Monotonía: f no es monótona.</td></tr>
<tr><td>No tiene puntos de intersección con los ejes de coordenadas.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Secante hiperbólica
f(x)=sech(x)</td><td>Dominio f: $\mathbb{R}$</td><td rowspan="6">

Figura 3. 26 *f(x)=sech(x)*</td></tr>
<tr><td>Imagen f: y ∈ $\mathbb{R}$:y∈ ⊢]0,1⊣ [</td></tr>
<tr><td>Acotamiento f: está acotada por 1</td></tr>
<tr><td>Tiene un punto máximo para</td></tr>
<tr><td>x=0,f(0)=1</td></tr>
<tr><td>Periodicidad: f no es periódica.</td></tr>
</table>

	Paridad: f es par.	
	No Monótona. Pero es creciente en ⊦]-∞,0] y decreciente [0,-∞⊣ [	
	El único punto de intersección con ejes de coordenadas es en el punto (0,1).	
Cosecante hiperbólica *f(x)=csch(x)*	Dominio f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	 **Figura 3. 27** *f(x)=csch(x)*
	Imagen f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	
	Acotamiento f: no está acotada	
	No tiene ni máximo ni mínimo.	
	Periodicidad: f no es periódica.	
	Paridad: f es impar.	
	Monotonía: f no es monótona.	
	No tiene puntos de intersección con los ejes de coordenadas.	

3.4. Superficies de revolución generadas por funciones hiperbólicas

En Figura 3.28 se muestra la superficie de revolución generada por la función f(x)=senh(x) alrededor del eje Y.

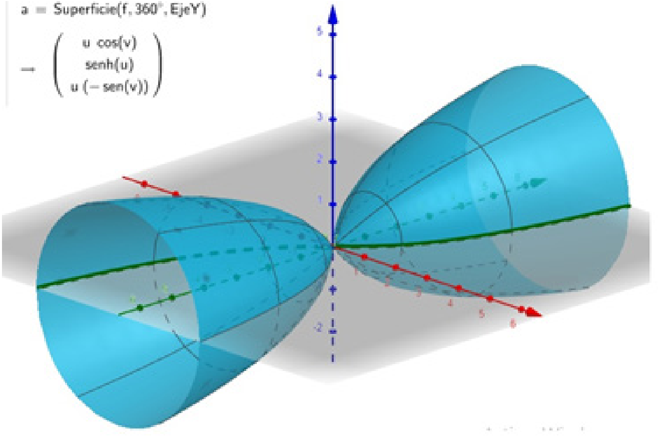


Figura 3. 28

La gráfica de la Figura 3.29 corresponde a la superficie de revolución generada por la función

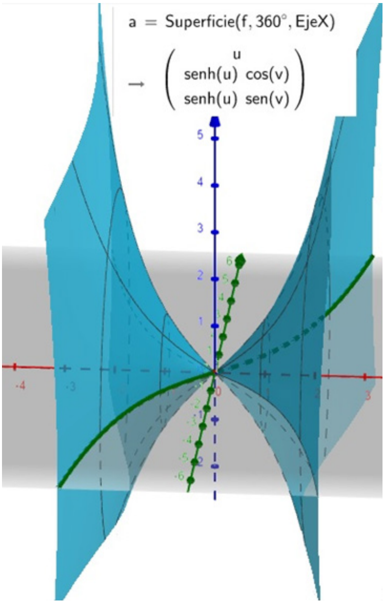


Figura 3. 29

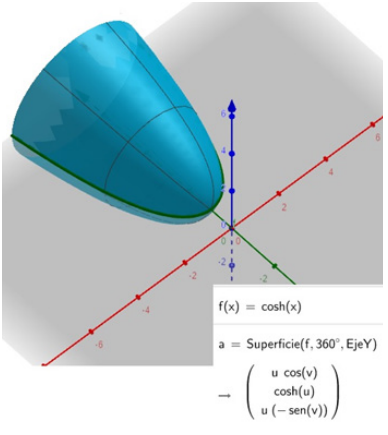


Figura 3. 30

*f(x)=senh(x)*pero rotando esta vez alrededor del eje X.

La superficie generada por la función *f(x)=cosh(x)* al rotar sobre el eje Y se muestra en Figura 3.30.

Observe las ecuaciones paramétricas de cada superficie y la combinación en las mismas de funciones hiperbólicas con funciones trigonométricas

Observe similitud y diferencias entre la superficie generada por

f(x)=senh(x) al rotar alrededor del eje Y y la función *f(x)=tanh(x)* al rotal alrededor del eje X.

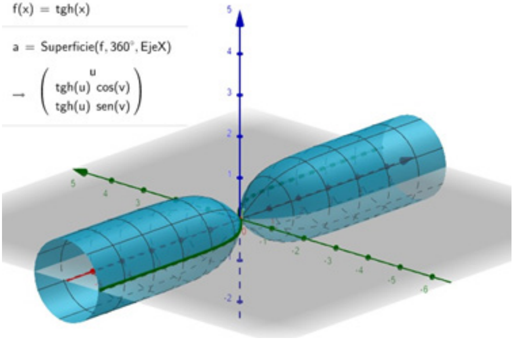


Figura 3. 31

Observe en Figura 3.32 la "caprichosa superficie que genera la función

f(x)=sech(x) es decir: $f(x) = \frac{1}{cosh(x)}$

En Figura 3.33 se muestra la rotación de la misma función f(x)=sech(x) pero esta vez alrededor del eje Y, observe cómo varía es aspecto de esta superficies al cambiar sus ejes de rotación.

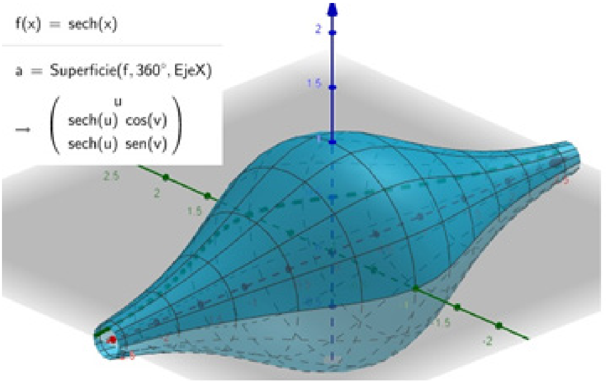


Figura 3. 32

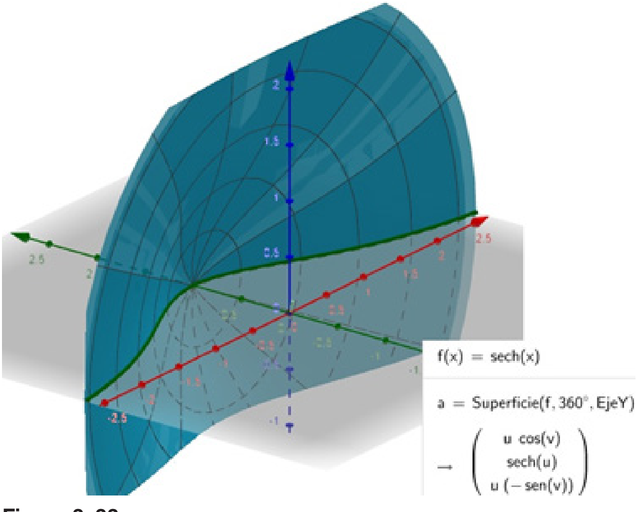


Figura 3. 33

3.5. Relaciones de las funciones hiperbólicas.

Modificando la Figura 3.20 con la Figura 3.28 y estableciendo analogías con las relaciones trigonométricas se tiene:

R_1: De la ecuación de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ se tiene que:

$(\cosh(t))^2 - (\operatorname{senh}(t))^2 = 1$

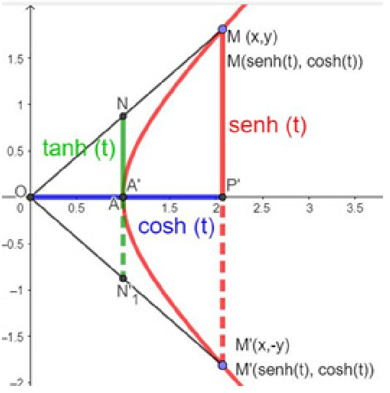


Figura 3. 34 Modificación de Figura 3.20

R_2: Se tiene que: ⊿OPM~⊿OAN por tanto:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \tanh(t) = \frac{senh(t)}{\cosh(t)}$$

R_3 Dividiendo R_1 por $(cosh(t))^2$ se tiene:

$$(tanh(t))^2 - 1 = \frac{1}{(\cosh(t))^2} = (csch(t))^2$$

R_4 Dividiendo R_1 por $(senh(t))^2$ se tiene:

1-(coth(t))2=(sech(t))2

R_5: *senh(-t)=-senh(t)*

R_6: $cosh(-t) = cosh(t)$

R_7: $tanh(-t) = -tanh(t)$

R_8 $senh(t+u) = senh(t) \times cosh(u) + cosh(t) \times senh(u)$

R_9: $cosh(t+u) = cosh(t) \times cosh(u) + senh(t) \times senh(u)$

R_10: $tanh(t+u) = \frac{tanh(t)+tanh(u)}{1+tanh(t)\times tanh(u)}$

R_11: $senh = 2senh(t) \times \cosh(t)$

R_12: $\cosh(2t) = (senh(t))^2 + (\cosh(t))^2$

R_13: $tanh(2t) = \frac{2\,tanh(t)}{1+(tanh(t))^2}$

R_14:Si $f(t) = senh(t) \Rightarrow f'(t) = \cosh(t)$

R_15: Si $f(t) = cosh(t) \Rightarrow f'(t) = \mathrm{senh}(t)$

R_16: Si $f(t) = tanh(t) \Rightarrow f'(t) = -(\tanh(t))^2 + 1 = (sech(t))^2$

3.6. Expresiones analíticas para las funciones hiperbólicas.

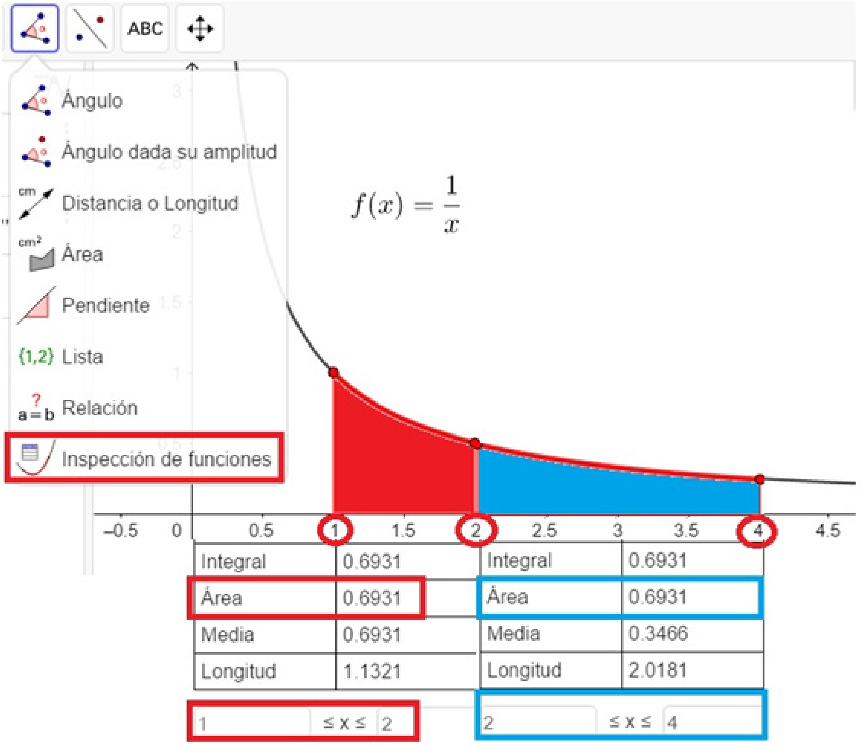


Figura 3. 35

En la Figura 3.35 se muestran las áreas de dos trapecios curvilíneos limitados por la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$ y las rectas $x=x_1$ y $x=x_2$ que limitan el trapecio. Para determinar el área se ha utilizado la opción "Inspección de funciones" del GeoGebra; de primera vista se tiene que las áreas de los dos trapecios curvilíneos son iguales, aunque tienen diferentes longitudes, pero si se establece la relación entre los valores de x_1 y x_2 en cada trapecio se tiene: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{1} = 2$ *primer trapecio curvilíneo* $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{2} = 2$ segundo trapecio curvilíneo de aquí se puede inferir que las áreas de los trapecios curvilíneos correspondiente a la hipérbola son iguales cuando las relaciones entre sus abscisas son iguales.

Otra inferencia no tan evidente es que ln(2)=0.6931 ahora es posible plantearse la hipótesis de que el cálculo realizado fue:

$$\ln\left(\frac{2}{1}\right) = ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(4) - \ln(2) = 1.3863 - 0.6931 \approx 0.6931$$

En general, el área A_{tc} del trapecio curvilíneo comprendido entre las rectas:

$x=x_1$ y $x=x_2$ y una hipérbola de la forma $f(x) = \frac{a}{x}$, es numéricamente igual a $A_{tc} = a * (\ln(x_2) - \ln(x_1) \Rightarrow ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{A_{tc}}{a} \Rightarrow e^{\frac{A_{tc}}{a}} = \frac{x_2}{x_1}$

En figura 3.36 se muestran los gráficos de las hipérbolas

$x^2 - y^2=1$ la hipérbola

$f(x) = \frac{1}{2x}$ o $xy = \frac{1}{2}$

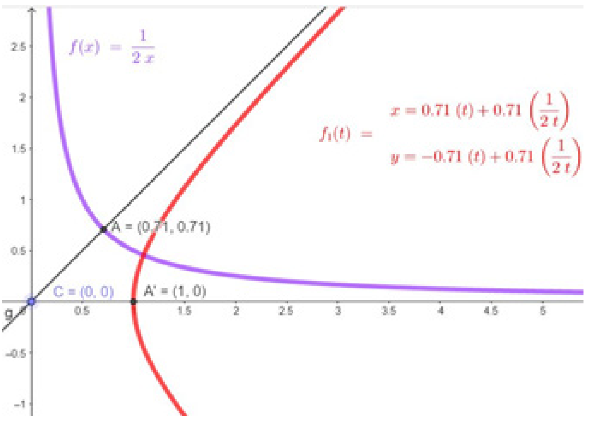


Figura 3. 36 Relación entre la hipérbola unitaria y la hipérbola de la forma $xy = \frac{1}{2}$

El la gráfica se puede observar que una es la rotación de la otra un ángulo de 45°respecto al origen de coordenadas, tal rotación se muestra en las fórmulas de trasformación con la expresión $0.71 \sim \frac{\sqrt{2}}{2} = sen(45^\circ) = \cos(45^\circ)$

En figura 3.37 se ha retomado la hipérbola unitaria $x^2 - y^2=1$ y en ella se tiene:

1. Como se ha dicho, *"Un ángulo hiperbólico t es numéricamente igual al doble del área del sector comprendido entre dos radios de la hipérbola y el arco de hipérbola correspondiente"*
2. A este número t se le llama la medida hiperbólica del ángulo AOP, con arco AP de la hipérbola.
3. Un ejercicio de simple observación indica que los trapecios curvilíneos QKAM y RLAM son iguales entre si y al área del sector hiperbólico OAM; en efecto, las áreas de los rectángulos de coordenadas de los puntos M y A son iguales:

$A_{OQMR} = A_{OKAL}$, **por lo tanto:** $A_{QKAM} = A_{QKAM} - A_{OKAL} + A_{OQMR} = A_{KLAM}$;

además, $A_{\Delta MOQ} = A_{\Delta AOK}$ **(por ser** $A_{\Delta MOQ} = \frac{A_{OQMR}}{2}$; $A_{\Delta AOK} = \frac{A_{OKAL}}{2}$.

De lo antes expuesto se tiene: A_QKAM=A_QKAM-A_ΔAOK+A_ΔMOQ

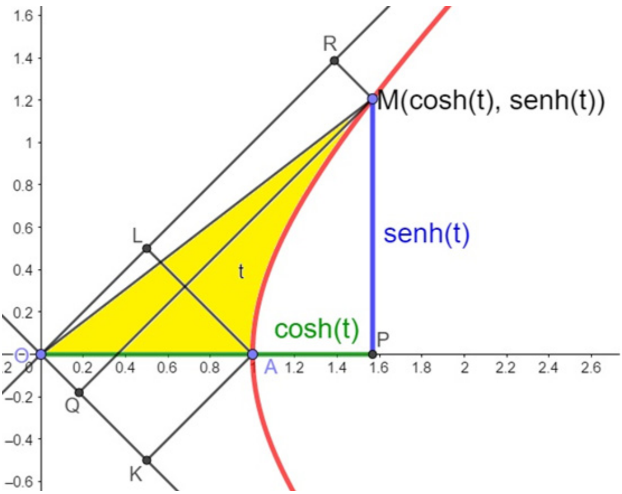


Figura 3. 37

4. Por definición de ángulo hiperbólico se tiene que A_OAM=1/2 t, por lo tanto:

$$A_{QKAM} = A_{\text{RLAM}} = \frac{1}{2}t$$

5. Observe que al tomar los segmentos $\overline{OK}$ y OQ ellos representan los puntos M y A en un sistema de coordenadas rotado un ángulo

de -45° para calcular el área del trapecio curvilíneo comprendido entre la hipérbola $f(x) = \frac{1}{2x}$ y los puntos Q y K bajo las condiciones de rotación dadas en el análisis de la Figura 3.36; de ahí se tiene:

$$A_{QKAM} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{OK}{OQ}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\cosh(t) - senh(t))\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}ln\big((\cosh(t) - senh(t))\big)$$

6. De (4) y (5) se tiene:

$$\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}ln\big((\cosh(t) - senh(t))\big) \Rightarrow -t = ln\big((\cosh(t) - senh(t))\big)$$

7. De igual forma se tiene:

$$A_{\mathrm{OAM}} = A_{\mathrm{RLAM}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{OR}{OL}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\cosh(t) + senh(t))}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}ln\big((\cosh(t) + senh(t))\big)$$

$$\Rightarrow t = ln\big((\cosh(t) + senh(t))\big)$$

8. $-t = ln\big((\cosh(t) - senh(t))\big) \Rightarrow e^{-t} = (\cosh(t) - senh(t)$ (1)

$t = ln\big((\cosh(t) + senh(t))\big) \Rightarrow e^{t} = (\cosh(t) + senh(t)$ (2)

De (1) y (2) $2\cosh(t) = e^{t} + e^{-t} \Rightarrow$

$$\cosh(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \quad \text{(I)}$$

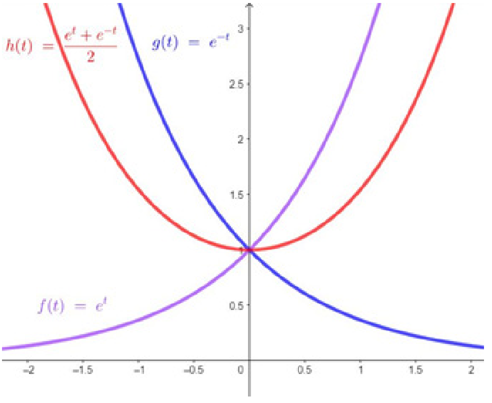


Figura 3. 38 f(t)=cosh(t) y las exponenciales que la conforman

De forma análoga se tiene:

$$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \quad \text{(II)}$$

$$\tanh(t) = \frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}} \quad \text{(III)}$$

I, II y III son expresiones analíticas de las funciones hiperbólicas, de ellas se pueden deducir otras reglas tales como:

$$(\cosh(t))^2 - (\operatorname{senh}(t))^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1$$

$$(\cosh(t))^2 + (\operatorname{senh}(t))^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh(2t)$$

$$2 * \operatorname{senh}(t) * \cosh(t) = 2\frac{e^t - e^{-t}}{2} * \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$$

$$= \operatorname{senh}(2t)$$

Ejercicio 3.1. A partir de las expresiones analíticas de las funciones hiperbólicas demuestre las siguientes relaciones:

a) $(\tanh(t))^2 - 1 = (\text{csch}(t))^2$

b) $1 - (\coth(t))^2 = (sech(t))^2$

c) $senh(-t) = -senh(t)$

d) $cosh(-t) = cosh(t)$

e) $tanh(-t) = -tanh(t)$

f) $senh(t+u) = senh(t) \times cosh(u) + cosh(t) \times senh(u)$

g) $cosh(t+u) = cosh(t) \times cosh(u) + senh(t) \times senh(u)$

h) $tanh(t+u) = \frac{tanh(t)+tanh\,(u)}{1+tanh\,(t)\times tanh\,(u)}$

i) $senh = 2senh(t) \times \cosh\,(t)$

j) $\cosh(2t) = (senh(t))^2 + (\cosh(t))^2$

k) $tanh(2t) = \frac{2\,tanh(t)}{1+(tanh(t))^2}$

l) $f(t) = senh(t) \Rightarrow f'(t) = \cosh(t)$

m) Si $f(t) = cosh(t) \Rightarrow f'(t) = \text{senh}(t)$

n) Si $f(t) = tanh(t) \Rightarrow f'(t) = -(\tanh(t))^2 + 1 = (\text{sech}(t))^2$

o) Conociendo que $senh(x) = \frac{3}{4}$ calcule los valores de las demás funciones hiperbólicas en x.

p) Conociendo que $tanh(x) = \frac{4}{5}$ calcule los valores de las demás funciones hiperbólicas en x.

q) Verificar que $senh(x)+cosh(x)=e^x$

r) Verificar que senh(2x)+cosh(2x)=e^{2x}

s) Demostrar que:

$$senh(x)senh(y) = \frac{\cosh(x+y)-\cosh(x-y)}{2}$$

$$senh(x)\cosh(y) = \frac{senh(x+y)+senh(x-y)}{2}$$

$$\frac{1+\tanh\,(x)}{1-\tanh\,(x)} = e^{2x}$$

t) Simplifica las expresiones:

$$senh^2(x)cos^2(y) + cosh^2(x)sen^2(y)$$

$$\frac{\cosh(\ln(x)) + senh(\ln(x))}{x}$$

u) Haciendo uso de las opciones “puntos especiales” e “inspección de funciones” del GeoGebra estudie las siguientes funciones:

$$h(x) = \begin{cases} senh(x) - x \ si \ x < 0 \\ x - sen(x) \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} senh(x) \ si \ x < 0 \\ sen(x) * \cosh(x) \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

Nota: una forma de definir con GeoGebra una función de este tipo se da en el siguiente ejemplo:

h(x)=Si(x<0,senh(x)-x,x-sen(x))

v) Calcular el valor de x si:

$$\tanh(\ln(x)) = \frac{1}{4}$$

$$senh(\ln(2x)) = \cosh(\ln(x))$$

Ejercicio 3.2. En este grupo de ejercicios se darán un conjunto de funciones estudiadas y en base a ellas se definirán nuevas funciones que usted debe analizar en base a sus elementos fundamentales como son: dominio, imagen, raíces, punto de intercepción con el eje de ordenadas, máximos y mínimos locales, signo, monotonía, área bajo la curva, etc., para ello debe auxiliarse de las opciones “puntos especiales” e “inspección de funciones” y rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Dada las funciones:

f(x)=cosh(x); g(x)=e^x

Estudiar la función *h(x)=g(f(x))-5*

En figura 3.39 se muestran los resultados del empleo de las opciones “puntos especiales” y de la inspección de la función en el intervalo [-1.5,1.5]

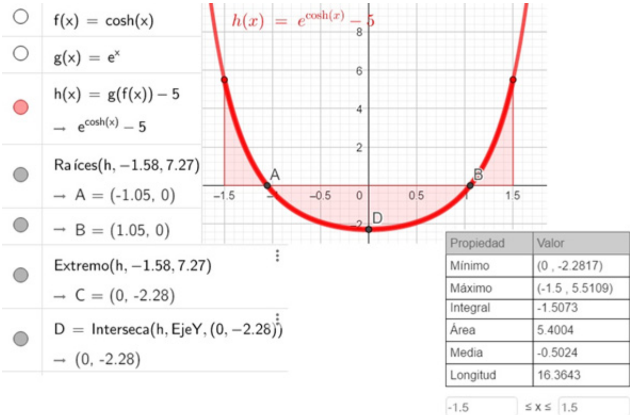


Figura 3. 39 Ejemplo resuelto:

Análisis:

» Dominio e imagen: Dominio h(x): $\mathbb{R}$;Imagen h(x): $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -2.28\}$

» Raíces: $x_1=-1.05$ y $x_2=1.05$.

» Intersección con el eje de ordenadas D=(0,-2.28) .

» Extremos: tiene un punto de mínima en D=(0,-2.28) .

» Monotonía: decreciente en]-∞,0] y creciente en [0,+∞[.

» Paridad: La función es par.

» Inyectividad: La función no es inyectiva.

» Continuidad: La función es continua.

Por la inspección de funciones se tiene para el intervalo [-1.5,1.5]:

» El valor mínimo coincide con el dado anteriormente.

» El valor máximo se encuentra en el extremo del intervalo.

» El área bajo la curva es de 5,4004 u^2.

» L longitud del arco es de 16,3643 u.

En cuanto a las superficies de revolución generadas se obtuvieron las siguientes superpuestas en la misma gráfica como se muestra en:

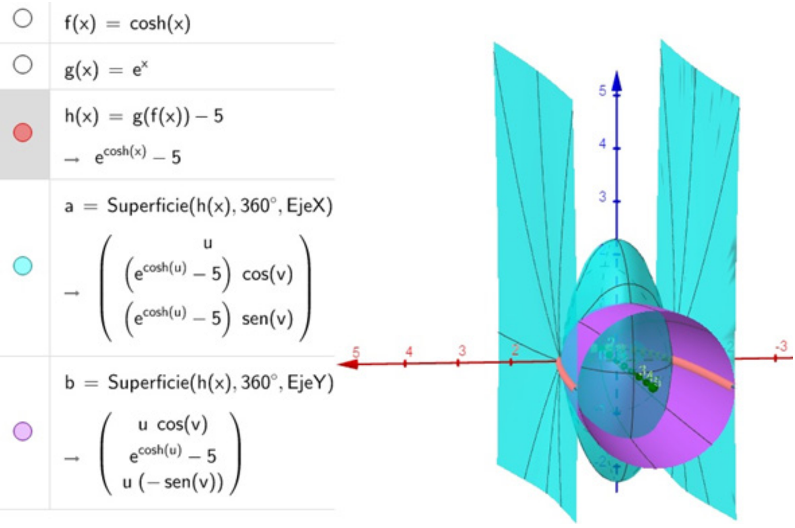


Figura 3. 40 Ejemplo resuelto:

Dada las siguientes funciones:

$$f(x) = e^x;$$

$$g(x) = ln\ (x)$$

$$h1(x) = senh(x)$$

$$h2(x) = \cosh(x)$$

$$h3(x) = \tanh(x)$$

Estudiar las siguientes funciones definidas como composición de las anteriores o como resultados de operaciones algebraicas donde ella formen parte:

i. $k(x) = h3(4x)$

ii. $k1(x) = (h1(x))^2$

iii. $k2(x) = h1(x) * h3(x)$

iv. $k3(x) = f(x) * h5(x)$

v. $y = g\left(h1(x)\right)$

vi. $y = h1\left(h2(x)\right)$

vii. $k4(x) = x * h2(x)$

viii. $k5(x) = h1(x^2)$

ix. $k6(x) = \frac{1-h2(x)}{1+h2(x)}$

x. $k(t) = \frac{1}{h3(\sqrt{1-t^2}}$

xi. $k1(t) = h3\left(f(t)\right)$

xii. $k2(t) = h3\left(h2(t)\right) + h1(t)$

xiii. $k5(x) = g\left(h1(x)\right) + f(h2(x))$

xiv. $k6(t) = g\left(h2(t)\right) - f\left(h1(t)\right)$

xv. $kk(x) = k1(x) + k2(x)$

xvi. $kk(x) = k1\left(k2(x)\right)$

xvii. $kk(x) = k2\left(k1(x)\right)$

xviii. $kk(x) = k1\left(k1(x)\right)$

xix. $kk(x) = k2\left(k2(x)\right)$

xx. A partir de las funciones definidas, defina otras según su criterio.

3.7. Funciones hiperbólicas inversas.

Si se limita el dominio de las funciones $cosh(t)$ y $sech(t)$ y se establece como el conjunto de valores x∈[0,∞[, entonces estas dos funciones, junto con las otras cuatro, son funciones inyectivas y, con la consideración de que en todo el recorrido es igual al codominio, lo que las hace suprayectivas, entonces las seis funciones hiperbólicas cumplen con ser biyectivas y admiten funciones inversas, las que se verán a continuación, estableciendo en cada caso, su dominio, gráfica y recorrido, incluyendo lo correspondiente a las funciones hiperbólicas directas.

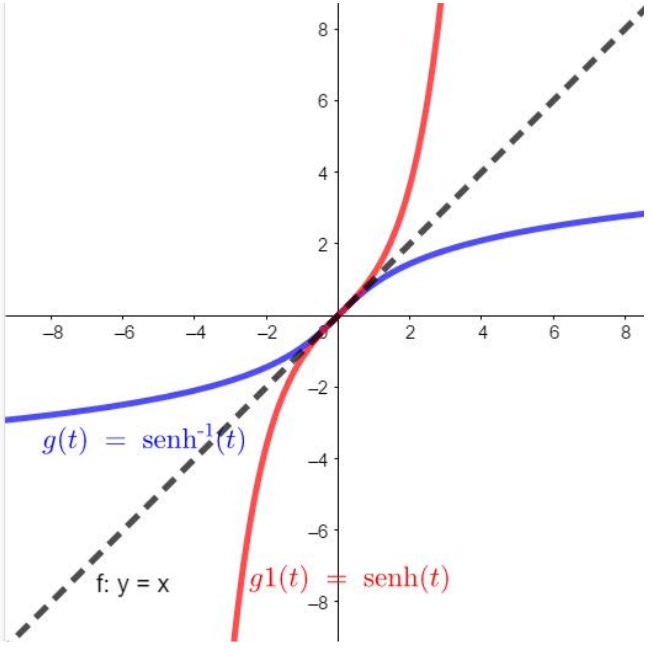


Figura 3. 41 función f(t)= senh(t) y su inversa

f(t)=senh^{-1} (t); Dominio f:$\mathbb{R}$*; Imagen f:*$\mathbb{R}$

Cuando las funciones hiperbólicas están en términos de la función exponencial, y ésta es función inversa de la función logaritmo natural, es posible encontrar expresiones para las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural.

Función seno hiperbólico inversa: Como se sabe del estudio en el Cálculo de las funciones inversas dado en el tomo I "Funciones algebraidas", es posible partir de la doble implicación donde:

$$y = senh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = senh(y)$$

$$x = senh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y - e^{-y}$$

Multiplicando por e^y se tiene:

$$2xe^y - e^{2y} + 1 = 0$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)}{2}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

$$y = ln\left(\left|x \pm \sqrt{x^2+1}\right|\right)$$

$$senh^{-1}(x) = ln\left|x \pm \sqrt{x^2+1}\right|$$

Por ser $e^y > 0 \Rightarrow x \pm \sqrt{x^2+1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Analizando:

Caso 1: $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

Dado que $\sqrt{x^2+1} > 0$, entonces $\sqrt{x^2+1} > x\ \forall x \in \mathbb{R}$

Caso 2: $x - \sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{x^2+1}$ lo cual es imposible, por tanto:

$$senh^{-1}(x) = ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)$$

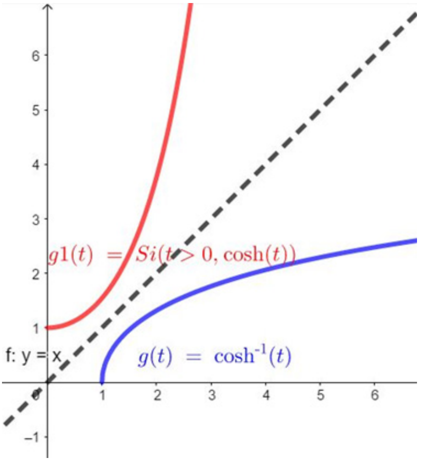


Figura 3. 42 Rama positiva del f(t)=cosh(t) y su inversa

f(t)=cosh⁻¹ (t); Dominio f:t∈[1,+∞[;Imagen f:f(t)∈[0,+∞[

Observe la simetría de la función y la función inversa respecto a la recta y=x

Determinando la función inversa expresándola en logaritmo neperiano:

$$y = cosh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = cosh(y)$$

$$x = cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

Multiplicando por e^y se tiene:

$$2xe^y - e^{2y} - 1 = 0$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = \frac{2\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)}{2}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = ln\left(\left|x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right|\right)$$

$$cosh^{-1}(x) = ln\left|x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right|$$

Por ser $e^y > 0 \Rightarrow x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

El dominio de $\sqrt{x^2 - 1}$ **es:** $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Caso 1: $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$

$x \in]-\infty,-1] \Rightarrow$ no hay solución ; $x \in [1,+\infty[\Rightarrow$ hay solución

Caso 2: $x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$

$x \in]-\infty,-1] \Rightarrow$ no hay solución; $x \in [1,+\infty[\Rightarrow$ hay solución

Se elige el primer caso para que $\cosh^{-1}(x)$ sea función y así ser congruentes con el dominio definido para la función cosh(x) elegido para hacerla inyectiva:

$$cosh^{-1}(x) = ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right);\ x \in [1, +\infty[$$

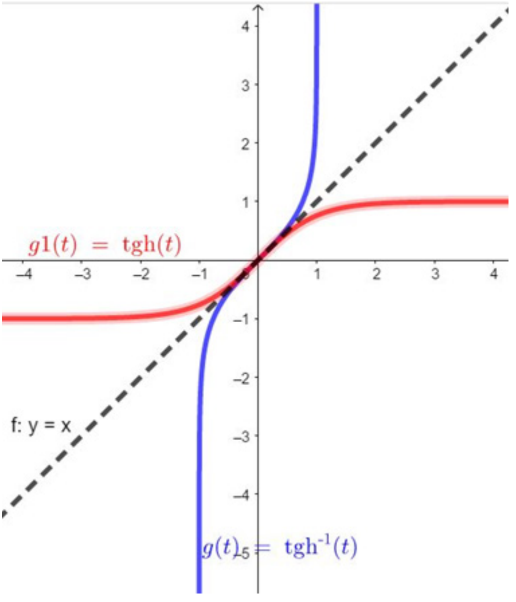


Figura 3. 43 función f(t)= tanh(t) y su inversa

f(t)=tanh^{-1} (t); Dominio f:t∈]-1,1[;Imagen f: ℝ

Función tangente hiperbólica inversa. Se parte de que

$$y = tanh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = tanh(y)$$

$$x = tanh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$$

Multiplicando por e^y se tiene:

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$1 + x = e^{2y}(1 - x)$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$$

Dado que $e^{2y} > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0$ y esta desigualdad se cumple para x∈]-1,1[

Concluyendo:

$$f(t) = tanh^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|;\ t \in]-1{,}1[$$

Curiosa resulta la siguiente identidad que relaciona funciones hiperbólicas con trigonométricas:

$$2tanh^{-1}(\tan(x)) = tanh^{-1}(sen\ (2x))$$

$$2tanh^{-1}(tan(x)) = 2\left(\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+tan(x)}{1-tan(x)}\right|\right)$$

$$= ln\left|\frac{1+tan(x)}{1-tan(x)}\right| = ln\left|\frac{1+\frac{sen(x)}{cos(x)}}{1-\frac{sen(x)}{cos(x)}}\right|$$

$$= ln\left|\frac{\frac{cos(x)+sen(x)}{cos(x)}}{\frac{cos(x)-sen(x)}{cos(x)}}\right| = ln\left|\frac{cos(x)+sen(x)}{cos(x)-sen(x)}\right| \quad (1)$$

$$tanh^{-1}(sen\ (2x)) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+sen\ (2x)}{1-sen\ (2x)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2sen\ (x)cos\ (x)}{1-2sen\ (x)cos\ (x)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{sen^2(x)+2sen\ (x)cos\ (x)+cos^2(x)}{sen^2(x)-2sen\ (x)cos\ (x)+cos^2(x)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(sen(x)+\cos(x))^2}{(sen(x)-\cos(x))^2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{sen(x)+\cos(x)}{sen(x)-\cos(x)}\right)^2\right|$$

De (1) y (2) se tiene la igualdad

$$ln\left|\frac{cos(x)+sen(x)}{cos(x)-sen(x)}\right| = \ln\left|\left(\frac{sen(x)+\cos(x)}{sen(x)-\cos(x)}\right)\right|$$

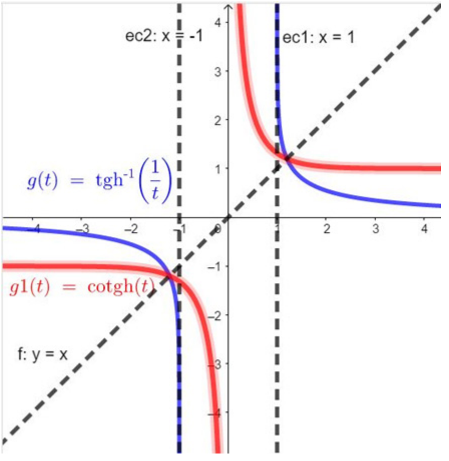


Figura 3. 44 función f(t)= coth(t) y su inversa

$f(t) = coth^{-1}(t);\;\; Dominio\ f: t \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]; Imagen\ f: \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Función cotangente hiperbólica inversa. Se parte de que

$$y = coth^{-1}(x) \Leftrightarrow x = coth(y)$$

$$x = coth(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \Rightarrow xe^y - xe^{-y} = e^y + e^{-y}$$

Multiplicando por e^y se tiene:

$$xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$$

$$x + 1 = e^{2y}(x - 1)$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

Dado que $e^{2y} > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$ y esta desigualdad se cumple para

$x > 1$ ó $x < -1$, $es\ decir\ \ x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$

Concluyendo:

$$f(t) = coth^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|;\ t \in \mathbb{R}\backslash[-1{,}1]$$

Observe en la Figura 3.45 como se "complementan" los gráficos de la tangente y la cotangente inversa.

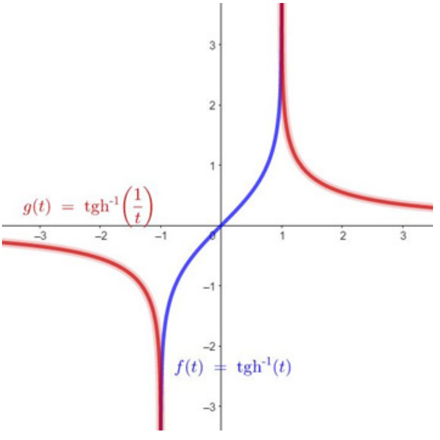


Figura 3. 45 tangente y cotangente hiperbólica inversa

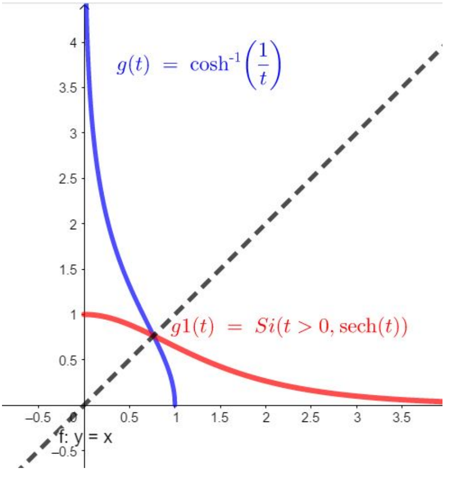


Figura 3. 46 función f(t)= sech(t) y su inversa

$$f(t) = sech^{-1}(t);\ \ Dominio\ f: t \in \left]0{,}1\right];\ Imagen\ f: \mathbb{R}^{+}$$

En forma análoga a como se dedujeron las expresiones de las funciones inversas anteriores se puede deducir la fórmula de la función inversa de la secante y llegar al siguiente resultado:

$$f(t) = sech^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}\right);\ t \in \left]0{,}1\right]$$

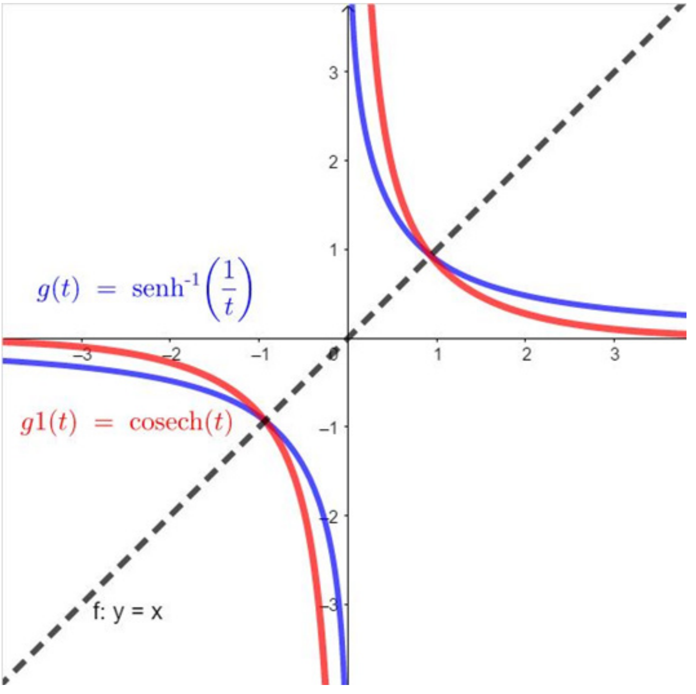


Figura 3. 47 función f(t)= csch(t) y su inversa

$$f(t) = csch^{-1}(t);\ \ Dominio\ f: \mathbb{R}\backslash\{0\}; Imagen\ f: \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

En forma análoga a la inversa secante hiperbólica se tiene la siguiente fórmula para la función inversa de la cosecante hiperbólica:

$$f(t) = csch^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\right);\ t \neq 0$$

En figuras 3.48 y 3.49 se muestran las superficies generadas por las funciones inversas del seno y el coseno hiperbólico.

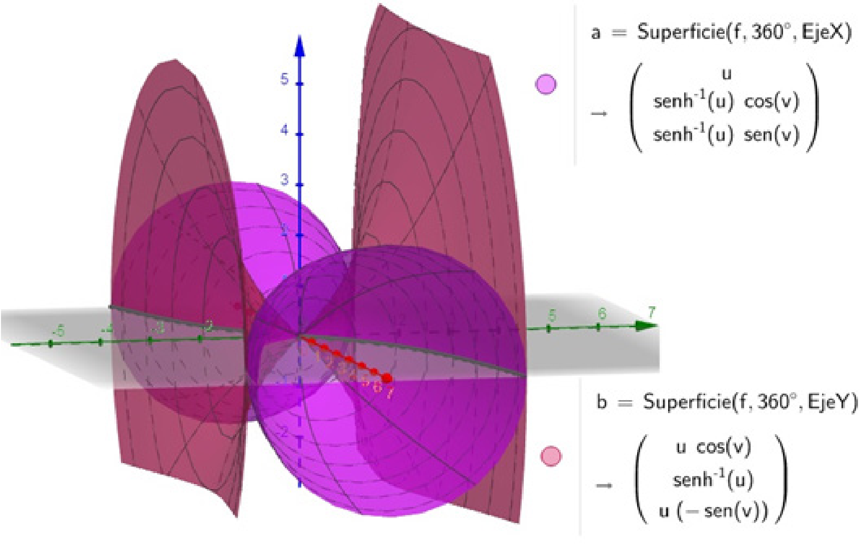


Figura 3. 48

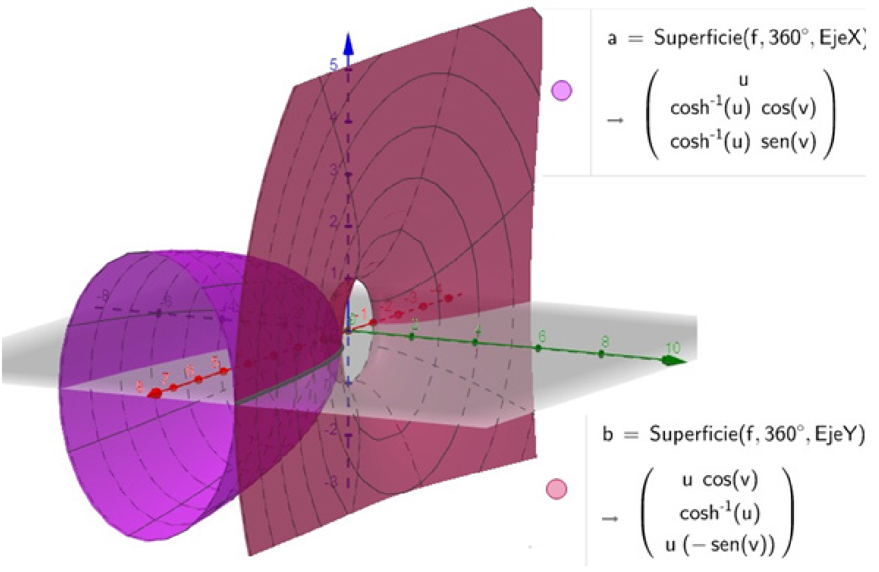


Figura 3. 49

Ejercicio 3.3. Al igual que en el ejercicio 3.2, en este grupo de ejercicios se darán un conjunto de funciones hiperbólicas inversas y otras funciones, para en base a ellas se definir nuevas funciones que usted debe analizar atendiendo a sus elementos fundamentales (dominio, imagen, raíces, punto de intercepción con el eje de ordenadas, máximos y mínimos locales, signo, monotonía, área bajo la curva, etc.) auxiliándose de las opciones "puntos especiales" e "inspección de funciones" y rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Dada las funciones:

$$f(x) = \cosh^{-1}(x);\ g(x) = \frac{1}{x}^{x}$$

Estudiar la función h(x)=f(g(x))-1

En figura 3.50 se muestran los resultados del empleo de las opciones "puntos especiales" y de la inspección de la función en el intervalo [3,0]

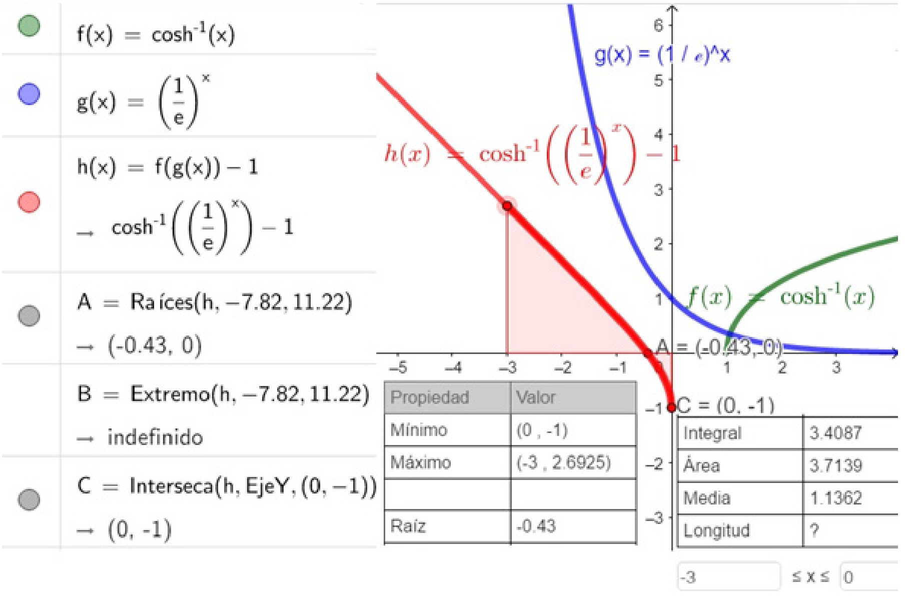


Figura 3. 50

Análisis:

» Dominio e imagen: Dominio h(x): $x \in \mathbb{R}: x \le 0$
Imagen h(x): $\{y \in \mathbb{R}: y \ge -1\}$

» Raíces: $x_1 = -0.43$.

» Intersección con el eje de ordenadas D=(0,-1) .

» Extremos: tiene un punto de mínima en D=(0,-1) .

» Monotonía: creciente en $[0,+\infty[$.

» Paridad: La función no es par ni impar.

» Inyectividad: La función es inyectiva.

» Continuidad: La función es continua.

Por la inspección de funciones se tiene para el intervalo [-3,0]:

» El valor mínimo coincide con el dado anteriormente.

» El valor máximo se encuentra en el extremo del intervalo (-3; 2.69).

» El área bajo la curva es de 3.7139 u^2.

Las superficies de revolución generadas y superpuestas en la misma gráfica se muestran en Figura 3.51:

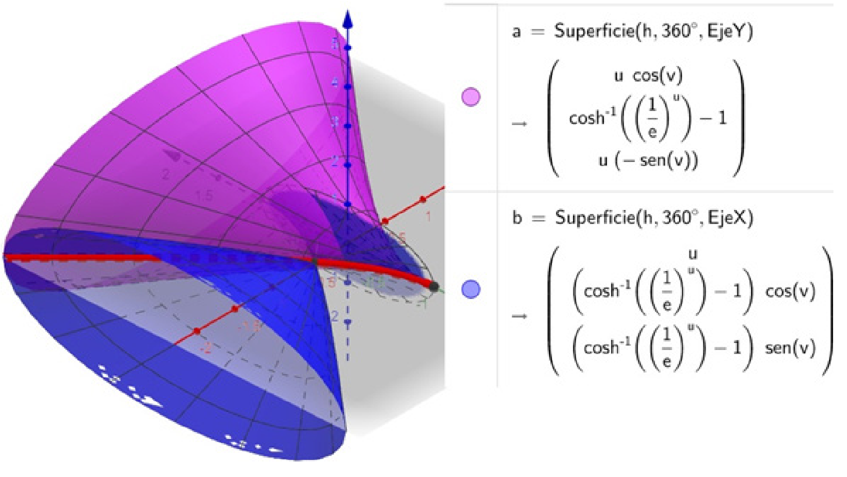


Figura 3. 51

Dada las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x ;$$

$$g(x) = ln\,(x)$$

$$h1(x) = senh^{-1}(x)$$

$$h2(x) = cosh^{-1}(x)$$

$$h3(x) = tanh^{-1}(x)$$

Estudiar las siguientes funciones definidas como composición de las anteriores o como resultados de operaciones algebraicas donde ella formen parte:

i. $k(x) = h3(4x)$

ii. $k1(x) = (h1(x))^2$

iii. $k2(x) = h1(x) * h3(x)$

iv. $k3(x) = f(x) * h5(x)$

v. $y = g\big(h1(x)\big)$

vi. $y = h1\big(h2(x)\big)$

vii. $k4(x) = x * h2(x)$

viii. $k5(x) = h1(x^2)$

ix. $k6(x) = \frac{1-h2(x)}{1+h2(x)}$

x. $k(t) = \frac{1}{h3(\sqrt{1-t^2}}$

xi. $k1(t) = h3\big(f(t)\big)$

xii. $k2(t) = h3\big(h2(t)\big) + h1(t)$

xiii. $k5(x) = g\big(h1(x)\big) + f(h2(x))$

xiv. $k6(t) = g\big(h2(t)\big) - f\big(h1(t)\big)$

xv. $kk(x) = k1(x) + k2(x)$

xvi. $kk(x) = k1\big(k2(x)\big)$

xvii. $kk(x) = k2\big(k1(x)\big)$

xviii. $kk(x) = k1\big(k1(x)\big)$

xix. $kk(x) = k2\big(k2(x)\big)$

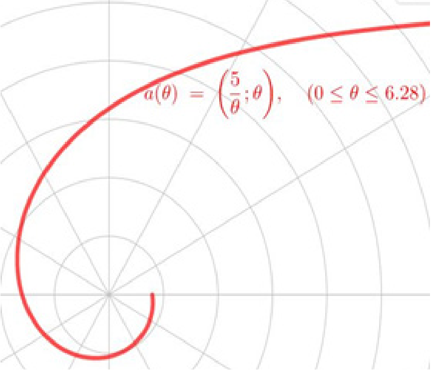
xx. A partir de las funciones definidas, defina otras según su criterio.

3.8. La espiral hiperbólica.

Cuando se estudió la espiral logarítmica se hizo referencia a la espiral hiperbólica y se dio su ecuación polar: $r = \frac{a}{\theta}$

Mientras su ecuación paramétrica es: $\left.\begin{array}{l} x = a\frac{\cos(t)}{t} \\ y = a\frac{sen(t)}{t} \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi$.

Se trata de una Curva Plana trascendental, también conocida como espiral recíproca y es la inversa de la espiral de Arquímedes.



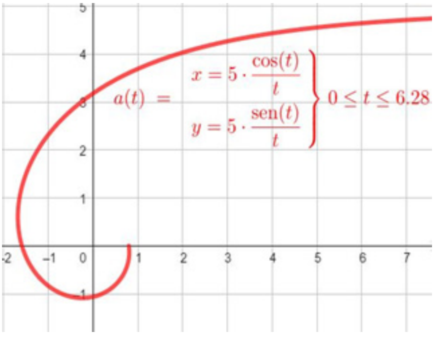


Figura 3. 53 Espiral hiperbólica en forma polar y paramétrica

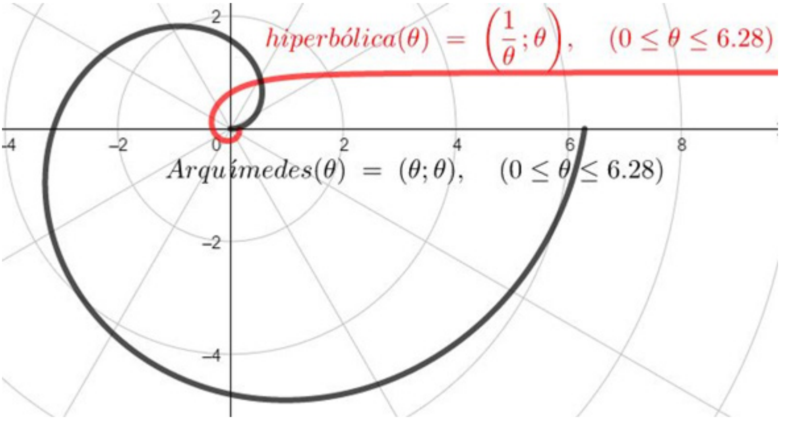


Figura 3. 52 Relaciones entre la espiral hiperbólica y la de Arquímedes.

La curva comienza en una distancia infinita del polo central (para θ comenzando desde cero, $r = \frac{a}{\theta}$ comienza del infinito), y se enrolla cada vez más rápidamente mientras se aproxima al polo central, la distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinito.

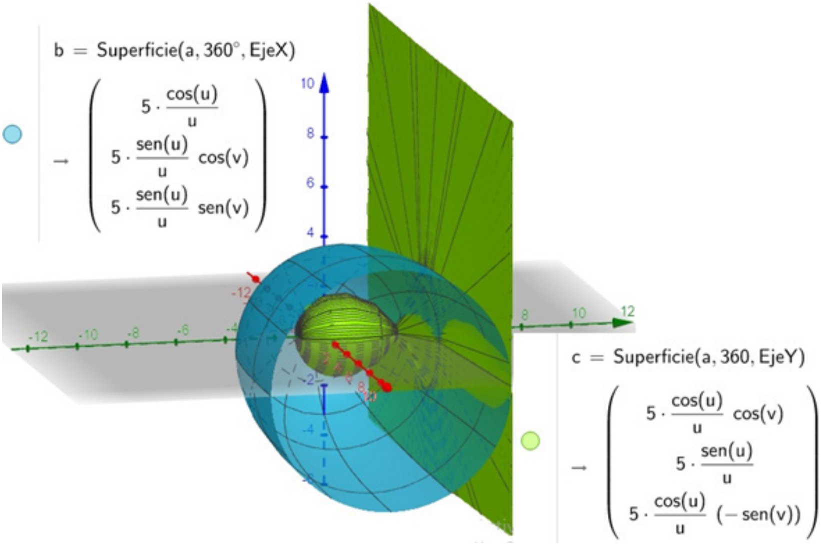


Figura 3. 54 Superficies generadas por la rotación de una espiral hiperbólica alrededor de los ejes X y Y respectivamente.

3.9. La catenaria

Una catenaria es una curva que representa físicamente la curva generada por una cadena, o hilo, sin rigidez flexional, suspendida de sus dos extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme.

La palabra catenaria proviene del latín catēnarĭus ('propio de la cadena'). Por extensión, en matemáticas se denomina catēnaria a la curva que adopta una cadena, cuerda o cable ideal perfectamente flexible, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme.

Figura 3. 55 Ejemplo de catenaria muy común en las ciudades

La catenaria es una curva plana cuya ecuación empleando coordenadas cartesianas (contenidas en el plano de la curva) y escogidas de manera que el eje Y coincida con el mínimo de la curva, resulta ser:

$$y = a * cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

En Figura 3.53 se muestra una familia de catenarias. Observe que para a=1 se tiene la gráfica del coseno hiperbólico.

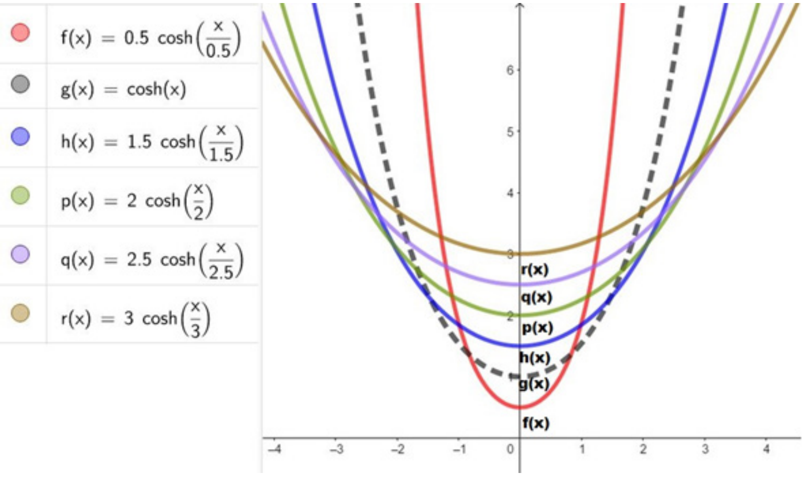


Figura 3. 56 Familia de catenarias

Algunas propiedades de la curva:

1. La curva es simétrica respecto al eje Y.
2. Cerca del punto más bajo la curva se semeja mucho a la parábola $y = a + \frac{x^2}{a}$ como se muestra en el ejemplo de la figura 3.53.

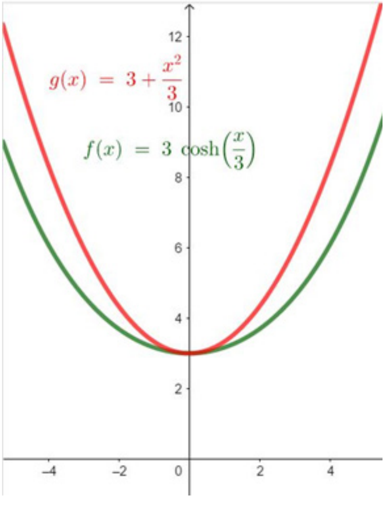


Figura 3. 57

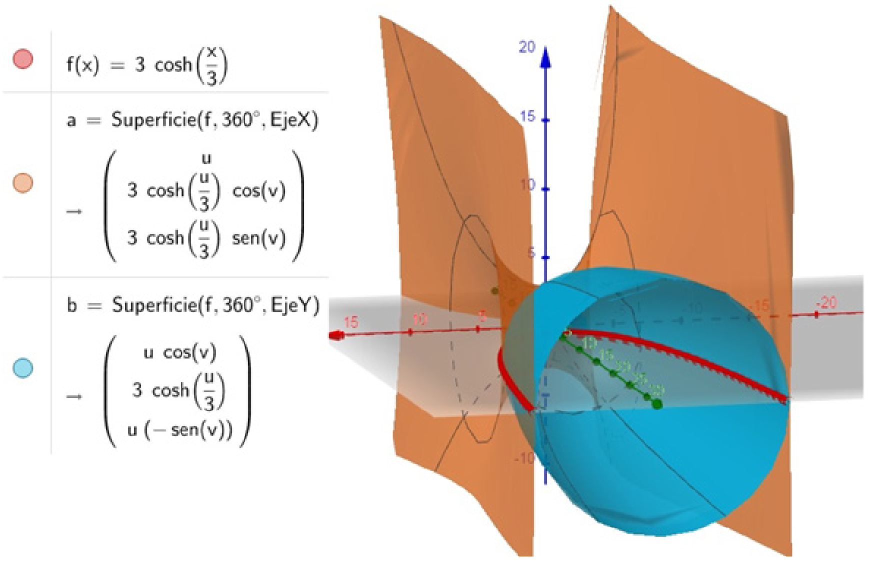


Figura 3. 58 Superficies generadas al rotar una catenaria alrededor de los ejes X y Y respectivvamente

Obsérvese que esta curva pasa en todos sus puntos por debajo de la catenaria y tiene su vértice o valor mínimo de la curva en A(a,0).

PINCELADA HISTÓRICA

Esta pincelada histórica sobre el problema de la catenaria ha sido tomada textualmente el libro "¿Es Dios un matemático?" de Mario Livio

"Galileo creyó que la forma debía de ser una parábola, pero el jesuita francés Ignatius Pardies (1636-1673) demostró que se equivocaba, pero no fue capaz de determinar cuál era la forma correcta.

Un año después Jakob Bernoulli planteó el problema a su hermano Johann, quien lo resolvió (mediante una ecuación diferencial). Leibniz y el físico matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) lo resolvieron también, pero la solución de Huygens utilizaba un método geométrico más complicado.

El hecho de que Johann lograse resolver un problema que había frustrado los intentos de su hermano y maestro, Jakob, seguía suponiendo una tremenda satisfacción para el joven Bernoulli hasta trece años después de la muerte de Jakob. En una carta que Johann escribió al matemático francés Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), no podía ocultar su complacencia:

Dice que mi hermano planteó este problema, y es cierto, pero ¿puede acaso colegirse que disponía de una solución para él? En absoluto. Cuando planteó el problema después de que yo se lo sugiriese (ya que yo fui el primero que pensó en él), ninguno de los dos fuimos capaces de encontrar la solución y, perdida la esperanza, lo calificamos de insoluble, hasta que el Sr. Leibniz publicó en el boletín de Leipzig de 1690, p. 360, que había resuelto el problema, pero no publicó la solución para dar tiempo a otros analistas; y esto fue lo que nos animó a mi hermano y a mí a volver a él con un nuevo enfoque.

Después de atribuirse la propiedad incluso de la sugerencia del problema, Johann prosigue abiertamente su complacencia:

Los esfuerzos de mi hermano no se vieron premiados por el éxito; yo, por mi parte, fui más afortunado, ya que hallé la habilidad (y lo digo sin presunción; ¿por qué habría de ocultarlo?) de resolverlo en su totalidad … Es cierto que su estudio me robó el sueño durante una noche entera … pero, a la mañana siguiente, lleno de júbilo, fui al encuentro de mi hermano, que seguía batallando miserablemente con este nudo gordiano sin llegar a ninguna parte, pensando como Galileo que la catenaria era una parábola. «¡Detente! ¡Detente!», exclamé, «¡deja de torturarte para intentar demostrar la identidad de la catenaria con la parábola, puesto que es falsa …» Y ahora me asombro al ver que concluye que mi hermano halló un método para resolver este problema … Y yo le pregunto, ¿cree en realidad que, si mi hermano hubiese resuelto el problema en cuestión, habría sido tan atento conmigo como para no aparecer en la lista de los que lo solucionaron, con el fin de cederme la gloria de aparecer en solitario en escena como el primero que lo resolvió, junto con los Sres. Huygens y Leibniz?

Por si era necesaria alguna prueba de que los matemáticos son, después de todo, humanos, he aquí esta historia. Sin embargo, esta rivalidad familiar no quita mérito alguno a los logros de los Bernoulli. Durante los años posteriores al episodio de la catenaria, Jakob, Johann y Daniel Bernoulli (1700-1782) no sólo resolvieron otros problemas similares de cuerdas que cuelgan, sino que lograron un progreso general de la teoría de ecuaciones diferenciales y resolvieron el problema del movimiento de proyectiles con un medio con resistencia.

La historia de la catenaria ilustra otra faceta de la potencia de las matemáticas: incluso los problemas físicos de apariencia más trivial poseen soluciones matemáticas. A propósito, la propia forma de la catenaria sigue haciendo las delicias de los millones de visitantes del famoso Gateway Arch en Saint Louis, Missouri. El arquitecto finés-americano Eero Saarinen (1910-1961) y el ingeniero de estructuras germano-americano Hannskarl Bandel (1925-1993) diseñaron esta icónica estructura con una forma similar a la de una catenaria invertida". (Livio, 2006) Págs. 149-151.

Figura 3. 59

Figura 3. 60 Empleo de los arcos catenarios en la Iglesia de Saint Martin en Donges, Francia

Figura 3. 61 Catenarias en puentes colgantes: Gran Puente de Akashi Kaikyō, Japón



Figura 3. 62 Catenarias en Puentes colgantes que conducen al mirador de La Cascada de Río Verde, Cascada de Río Verde Chico; o Cascada Pailón del Diablo; está situada en los Andes del Ecuador y se alcanzan siguiendo la ruta del río Pastaza en la Provincia de Tungurahua. Es una atracción turística popular por la vegetación que la rodea y las rocas que dividen la cas-cada. Tiene aproximadamente unos 80 metros de altura, y unos 20 metros de profundidad y gradas talladas a mano que llevan a un mirador con vista refulgente.

Solución con GeoGebra de un problema relacionado con la catenaria.

Problema:

Al colgar un cable telefónico (uniforme y flexible) entre dos puntos, adopta la forma de una catenaria cuya ecuación está dada por $f(x) = 5\,cosh\left(\frac{x}{5}\right)$ Determinar la longitud del cable, de acuerdo con la figura, entre las abscisas x =-10 y x = 10 m.

Solución tradicional:

Para resolver este problema se necesita del cálculo integral, ya que la longitud de un arco viene dado por la fórmula:

$$L = 2\int_0^{10}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad f(x) = 5\,cosh\left(\frac{x}{5}\right) \Rightarrow f'(x) = senh\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$L = 2\int_0^{10}\sqrt{1+\left[senh\left(\frac{x}{5}\right)\right]^2}\,dx = 2\int_0^{10} cosh\left(\frac{x}{5}\right)d\,x = 2\left[5senh\left(\frac{x}{5}\right)\right]_0^{10} \approx 2(18.1443)$$

$$\approx 36.2686$$

Solución con GeoGebra:

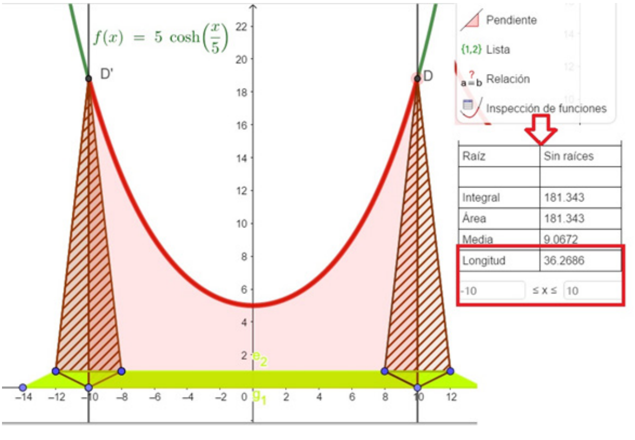


Figura 3. 63 Observe que, quitando los dibujos que ilustran el problema, la solución se reduce a escribir la función y empleando la opción “Inspección de funciones” de menú correspon-diente suministrar los datos y el resultado es inmediato.

CAPÍTULO IV.

ECUACIONES RECURRENTES Y FUNCIONALES.

"…nos vemos llevados así al vasto e interesante campo

de las ecuaciones funcionales que hasta ahora

ha sido investigadas normalmente sólo

bajo la hipótesis de la diferenciabilidad

de las funciones implicadas".

David Hilbert

Los problemas futuros de la matemática

París 1900

4.1. Ecuaciones recurrentes, introducción.

Para iniciar el estudio del tema comenzaremos por el concepto de sucesión.

En análisis matemático y álgebra,

> **Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su imagen es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza.**

Cada uno de ellos es denominado término (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión. No debe confundirse con una serie matemática, que es la suma de los términos de una sucesión.

A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición.

Ejemplos 1:

a) La sucesión de los números pares

b) Sea f: $\mathbb{N}$→{-1,0 ,1} definida por la expresión $f(n) = \frac{1}{n} Cos\left(n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Generalmente las sucesiones se denotan por a_n, para este caso se tiene:

$$a_n = \left\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{12}, 0, -\frac{1}{14}, 0, \frac{1}{16}, 0, -\frac{1}{18}, 0, \frac{1}{20} \ldots \frac{1}{n} Cos(n\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots\right\}$$

La representación gráfica de esta sucesión se muestra en Figura 4.1:

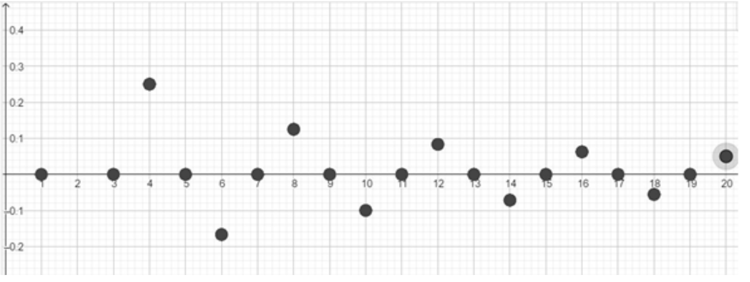


Figura 4. 1

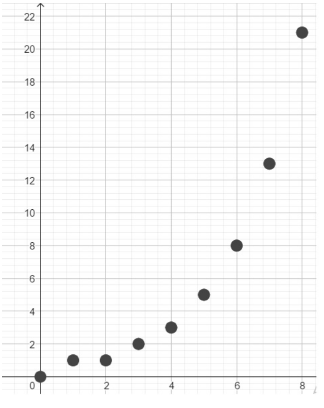


Figura 4. 2

c)La conocida sucesión de Fibonacci, la que toma los siguientes valores:

a_n={0,1,1,2,3,5,8,13,21…}

La sucesión comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define Figura 4.2.

Figura 4. 3

Leonardo de Pisa (Pi-sa, c. 1170 - ib., post. 1240), también llamado Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o simplemente Fibonacci, fue un matemático italiano. Difundió en Europa la utilidad práctica del sistema de numeración indoarábigo frente a la numeración romana, y fue el primer europeo en describir la sucesión numérica que lleva su nombre.

¡ATENCIÓN!

Hay que precisar qué es una **relación de recurrencia**:

Una relación de recurrencia es una ecuación que define una secuencia recursiva; cada término de la secuencia es definido como una función de términos anteriores

¡ATENCIÓN!

Hay que precisar qué es una **secuencia recursiva**:

Recurrencia, recursión o recursividad es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición, siendo esta característica discernible en términos de autorreferencialidad[10], autopoiesis[11] fractalidad[12], o, en otras palabras, construcción a partir de un mismo tipo.

La sucesión de Fibonacci se define en forma recursiva según la siguiente expresión matemática:

[10]Fenómeno que ocurre en el lenguaje natural o formal consistente en una oración o fórmula referente en forma directa a sí misma, a través de algunas oraciones o fórmulas intermedias, o por medio de algunas codificaciones.

[11] Neologismo que designa la cualidad de un sistema capaz de reproducirse y mantenerse por sí mismo. La autopoiesis es la condición de existencia de los seres vivos en la continua producción de sí mismos.

[12] Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas.

$$f_n\begin{Bmatrix} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{Bmatrix}$$

¡Tarea!

a) Desarrolle 10 términos la sucesión de Fibonacci a partir de la definición recursiva.

b) Calcule el término f_{100} de la sucesión de Fibonacci

Si no pudo realizar la tarea (b) o mandó al diablo al que la planteó, no se preocupe la sucesión de Fibonacci tiene también una fórmula explicita con la que no se requiere calcular todos los términos anteriores para calcular el término deseado.

La fórmula en cuestión es:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

De modo que

$$f_{100} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{100}$$

No pretendo que lo calcule manualmente, pero con el mathematica se tiene que:

$$N[\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{100} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{100}] \approx 3.542248481792622 \times 10^{20}$$

Valor que con más exactitud se puede calcular con la función Fibonacci del mismo sistema:

Fibonacci[100]=354224848179261915075

Es posible demostrar que el segundo término de la expresión explícita de la sucesión de Fibonacci $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, es menor que 0.5 por lo que en una expresión aproximada se puede prescindir de ella quedando:

Figura 4. 4

Mathematica:

Programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemática y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en Wolfram Research, compañía ubicada en Champaign, Illinois. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general.

$$f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx (0.4472)(1.6180)^n$$

Para n=100 se tiene: $f_{100} \approx (0.4472)(1.6180)^{100} \approx 3.534707834635944 \times 10^{20}$

¡Tarea!

a) Encuentre los cuatro primeros términos de la sucesión de Fibonacci mediante la fórmula explícita y compárelos con la forma recursiva.

b) Demuestre por inducción completa que la expresión explícita es válida para generar la sucesión de Fibonacci.

Pero no es sólo la sucesión de Fibonacci las sucesiones que tienen expresiones recursivas y explícitas para expresarse, veamos algunas de ellas:

a) n! Tiene la conocida expresión n!=n(n-1)(n-2)…1 y una expresión recursiva:

$$n! = \begin{cases} 1 \; si \; n = 0 \\ n(n-1)! \; si \; n \geq 0 \end{cases}$$

b) Progresión aritmética: sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es una constante (d), es decir, cada término a partir del primero se obtiene sumando al anterior una cantidad constante (d).

Expresión recursiva:

$$a_n \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_n + d \end{cases}$$

Figura 4. 5

Eugène Charles Catalan (30 de mayo de 1814 - 14 de febrero de 1894) matemático francés y belga que trabajó en la teoría de números. Trabajó en fracciones continuas, geometría descriptiva, teoría de números y combinatoria. Dio su nombre a una superficie única (superficie periódica mínima en el espacio R^3) que descubrió en 1855. Anteriormente había enunciado la famosa conjetura de Catalan, que fue publicada en 1844 y probada finalmente en 2002 por el matemático rumano Preda Mihăilescu. Introdujo los números de Catalan para resolver un problema combinatorio.

Expresión explícita $a_n=a_1+(n-d)d$

c) Progresión geométrica: Sucesión en la que el elemento siguiente se obtiene multiplicando el elemento anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión.

¡Tarea!

a) Encuentre una expresión recurrente y una explícita para las progresiones geométricas.

b) Otra sucesión recursiva son los números de Catalan forman una secuencia de números naturales que aparece en varios problemas de conteo que habitualmente son recursivos. Sus expresiones recurrentes son:

$$C_0 = 1 \;; \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1} \quad con\; n \geq 0$$

$$C_n = \begin{cases} si\; n = 0 \implies 1 \\ si\; n > 0 \implies \dfrac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1} \end{cases}$$

Mientras su expresión explícita es:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \quad con\; n \geq 0$$

Como tarea se propone

1. calcular los primeros 5 términos de la sucesión de Catalan.

Demuestre por inducción completa la equivalencia entre ambas fórmulas.

2. El término número 100 de sucesión de Catalan tiene la forma 73…600.

A partir del resultado alcanzado en (1) dé una cota superior a la cantidad de dígitos que deben cubrir los tres puntos suspensivos.

3. Mediante el comando Table[CatalanNumber[n],{n,100}] del Mathematica es posible calcular este número, para que no lo sorprenda el resultado lo adjuntamos a continuación:

```
{1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, \2674440, 9694845, 35357670,
129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650,
1289904147324, 4861946401452, 18367353072152, 69533550916004, 263747951750360,
1002242216651368, 3814986502092304, 14544636039226909,55534064877048198,
212336130412243110, 812944042149730764, 3116285494907301262, 11959798385860453492,
45950804324621742364, 176733862787006701400, 680425371729975800390,
2622127042276492108820, 10113918591637898134020, 39044429911904443959240,
150853479205085351660700, 583300119592996693088040, 2257117854077248073253720,
8740328711533173390046320, 33868773757191046886429490, 131327898242169365477991900, \
509552245179617138054608572, 1978261657756160653623774456,
7684785670514316385230816156, 29869166945772625950142417512, \
116157871455782434250553845880, 451959718027953471447609509424, \
1759414616608818870992479875972, 6852456927844873497549658464312, \
26700952856774851904245220912664, 104088460289122304033498318812080, \
405944995127576985730643443367112, 1583850964596120042686772779038896, \
6182127958584855650487080847216336, 24139737743045626825711458546273312, \
94295850558771979787935384946380125, 368479169875816659479009042713546950, \
1440418573150919668872489894243865350, 5632681584560312734993915705849145100,
22033725021956517463358552614056949950, 86218923998960285726185640663701108500, \
337485502510215975556783793455058624700, 1321422108420282270489942177190229544600, \
5175569924646105559418940193995065716350, 20276890389709399862928998568254641025700, \
79463489365077377841208237632349268884500, 311496878311103321137536291518809134027240,
1221395654430378811828760722007962130791020,
4790408930363303911328386208394864461024520, \
18793142726809884575211361279087545193250040, \
73745243611532458459690151854647329239335600, \
289450081175264899454283846029490767264392230, \
1136359577947336271931632877004667456667613940, \
4462290049988320482463241297506133183499654740, \
17526585015616776834735140517915655636396234280, \
68854441132780194707888052034668647142985206100, \
270557451039395118028642463289168566420671280440, \
1063353702922273835973036658043476458723103404520, \
4180080073556524734514695828170907458428751314320, \
16435314834665426797069144960762886143367590394940, \
64633260585762914370496637486146181462681535261000, \
254224158304000796523953440778841647086547372026600, \
1000134600800354781929399250536541864362461089950800, \
3935312233584004685417853572763349509774031680023800, \
15487357822491889407128326963778343232013931127835600, \
60960876535340415751462563580829648891969728907438000, \
239993345518077005168915776623476723006280827488229600, \
944973797977428207852605870454939596837230758234904050, \
3721443204405954385563870541379246659709506697378694300, \
14657929356129575437016877846657032761712954950899755100, \
57743358069601357782187700608042856334020731624756611000, \
227508830794229349661819540395688853956041682601541047340, \
896519947090131496687170070074100632420837521538745909320}
```

De lo mostrado hasta aquí se pueden inferirse las siguientes conclusiones empíricas:

a) Las expresiones recurrentes son "más fáciles" de expresar que la las explicitas.

b) Para obtener manualmente un término particular de una expresión recurrente es necesario comenzar desde el inicio hasta obtener el término deseado.

c) Las fórmulas explícitas no tienen el inconveniente anterior.

d) En programación una y otra fórmula presentan ventajas y desventajas.

Se ha expresado que: "Una relación de recurrencia es una ecuación que define una secuencia recursiva", para precisar más el concepto expresaremos que:

> **Una relación de recurrencia** para la sucesión a_0, a_1, . . . **es una ecuación que relaciona a_n con ciertos predecesores a_0, a_1, . . ., a_{n-1}.**
>
> Las condiciones iniciales para una sucesión a0, a1, . . . son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión.

Como se está hablando de **ECUACIONES RECURRENTE**, es preciso definir lo que se entiende por resolver una ecuación recurrente:

Resolver una relación de recurrencia que implica una sucesión a_0, a_1, . . .a_n **significa encontrar una fórmula explícita para el término general a_n**. En este libro, por ser introductorio al tema se estudian dos métodos para resolver relaciones de recurrencia:

1. Por una vía intuitivas
2. Mediante el empleo de ecuaciones características

4.2. Solución por una vía intuitivas:

Para encontrar una fórmula explícita a partir de una relación de recurrencia existen tres aproximaciones diferentes que pueden utilizarse una u otra en dependencia de la habilidad desarrollada por el alumno.

i. Conjeturar la solución, donde con un poco de experiencia e intuición pueden ser frecuentemente resueltas por un trabajo inteligente de conjetura. Generalmente el método consta de cuatro etapas:

a) Calcular algunos valores iniciales de la recurrencia.

b) Buscar alguna regularidad y conjeturar una forma general apropiada.

c) Probar por inducción matemática que la fórmula obtenida es correcta.

Ejemplo 2 : sea la fórmula recursiva: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 3$

Solución:

a) Calculando los primeros valores: a_n={2,5,8,11,14,17…}

b) Buscando alguna regularidad:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	5	8	11	14	17
2	2+3	2+3*2	2+3*3	2+3*4	2+3*5
an =2+ 3(n-1)					

c) Probar por inducción matemática que la fórmula obtenida es correcta.

P (1): a_1 = 2+3(1-1) =2: se cumple para un primer elemento

P(k): $a_k = a_{(k-1)} +3 = 2+ 3(k-1)$ P(k+1): $a_{(k+1)} = a_{(k)} +3 = 2+ 3(k)$

Demostración:

Por la fórmula recursiva se tiene que:

$a_{k+1} = a_{(k)} +3$ (1), pero por hipótesis ak = 2+ 3(k-1) sustituyendo (1) se tiene:

a_{k+1} = 2+ 3(k-1) +3= 2+3k-3+3= 2+3k que es el resultado de sustituir directamente k+1 en la fórmula con lo que se prueba que $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

ii. Usar la recurrencia misma para sustituir para algún T(m), m<n, es decir, usar el método iterativo para resolver la ecuación de recurrencia. En lo esencial el método consiste partir de una expresión recursiva e ir retrocediendo aplicando la misma recursividad (dando pasos

hacia atrás o método del cangrejo como se decía en mis tiempos de estudiante) hasta encontrar una relación que permita hacer una conjetura, pero esta vez fundamentada en el mismo proceso recursivo que define la relación de recurrencia.

Ejemplo 3: Sea la misma fórmula recursiva del ejemplo anterior:

$$a_1 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + 3$$

Solución:

Se debe partir de la fórmula recursiva $a_n=a_{n-1}+3$ (1)

Paso hacia atrás ↓ Remplazando n por n-1 se tiene:

↓ $a_{n-1}=a_{n-2}+3$ (2)

↓ Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

↓ $a_n=(a_{n-2}+3)+3$

$a_n=a_{n-2}+2*3$ (3) ¿Por qué 2*3 y no 6? Porque un antiguo artificio matemático indica no reducir las expresiones hasta el final para observar su comportamiento.

↓ Haciendo $a_{n-2}=a_{n-3}+3$ (4)

↓ Sustituyendo (4) en (3) se tiene:

↓ $a_n=(a_{n-3}+3)+2*3$

↓ $a_n=a_{n-3}+3*3$

…

$a_n=a_{n-k}+k*3$

Haciendo k=n-1 ¿por qué? Porque conviene al método seguido para obtener la fórmula explícita. Se tiene:

$a_n=a_{n-(n-1)}+(n-1)*3$

$a_n=a_1+(n-1)*3$ y como $a_1=2$ se obtiene la fórmula:

$a_n=2+3(n-1)$

Aunque en los textos no se especifica, sería conveniente probar la fórmula obtenida por inducción completa como se hizo en el caso anterior.

Ejercicios propuestos (1):

1. Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones recurrentes:

Ecuaciones	Respuestas
$f(n) = \begin{cases} 0 & si \quad n=0 \\ n+f\,(\,n-1\,) & si \quad n>0 \end{cases}$	$f[n] \to \frac{1}{2}n(1+n)$
$S_n = 2S_{n-1};\ S_0 = 1$	$S[n] \to 2^n$
$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$	$a[n] \to C[1] + 3^n C[2]\}$
$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$	Sucesión de Fibonacci
$a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$	$a[n] \to (-1)^n C[1] + (-1)^n nC[2]$
$a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$	$a[n] \to (-1)^n C[1] + (-1)^n nC[2] + (-1)^n n^2 C[3]$
$a_n+a_{n-1}-6a_{n-2} = 0$	$a[n] \to (-3)^n C[1] + 2^n C[2]\}$
$2a_n = 7a_{n-1}-3a_{n-2};\ a_0=a_1=1$	$a[n] \to \frac{1}{5}2^{-n}(4+6^n)\}$

2. Para una población de venado con una condición inicial $d_0=100$, en un instante determinado el incremento de un momento n-1 a un momento n se expresa por la relación $d_n+d_{n-1}=0{,}1d_{n-1}$ encuentre la expresión explícita que permita calcular la cantidad de venados en un momento k cualquiera.

Respuesta: $d[n] \to 1000.\,0.90909090909091^{-1.n} = 1000(1.1)^n$

3. El número C_n mínimo que se pueden hacer con n discos en la torre de Hanoi viene expresado por la ecuación recursiva $C_n=2C_{n-1}+1$; $C_1=1$

Encuentre una expresión explicita para esta fórmula.

Respuesta: $C[n]\to-1+2^n$

4. Sea Sn la suma de los n primeros números naturales impares:

   a) Plantee la ecuación de recurrencia

   b) Resuélvala

Respuestas:

$a_n=a_{n-1}+(2n+1);\ a_0=1$

$a[n] \to -2+2n+n^2$

5. Sea $S_1=0$, $S_2=1$ y $S_n = \frac{S_{n-1}+S_{n-2}}{2}$ n=3,4, … Calcular S3, S4,

Respuesta: $S[n] \to \frac{1}{3} 2^{1-n}(2(-1)^n + 2^n)$

$$\text{RecurrenceTable}[\{a[n] == \frac{a[n-1]+a[n-2]}{2}, a[0] == 0, a[1] == 1\}, a, \{n, 0, 10\}]$$

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \frac{21}{32}, \frac{43}{64}, \frac{85}{128}, \frac{171}{256}\}$$

$$\text{Table}[\frac{1}{3} 2^{1-n}(2(-1)^n + 2^n), \{n, 11\}]$$

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \frac{21}{32}, \frac{43}{64}, \frac{85}{128}, \frac{171}{256}\}$$

6. Suponga que una persona invierte $2000 al 14% compuesto anualmente. Sea An la cantidad al final de n años:

a) Determine una recurrencia para la sucesión A_0, A_1, …

b) Determine una condición inicial para la sucesión A_0, A_1, …

c) Determine A_1, A_2, y A_3.

d) Determine una fórmula explícita para An.

e) ¿Cuánto tiempo tardará una persona en duplicar la inversión inicial?

Respuestas:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{14}{100} A_{n-1}$$

$$A_0 = \$2000$$

A1	A2	A3
2280	2599.2	2963.088

$$A[n] \to 2^{4-n} 5^{3-2n} 57^n$$

iii. Evidentemente los métodos explicados, aunque muy fáciles para expertos y personas que desarrollen habilidades en aplicarlos, por su carácter poco algorítmico no resultan prácticos, pero afortunadamente existe una técnica que puede ser usada para resolver ciertas clases de recurrencias casi automáticamente, es decir, usar la solución general de ciertas ecuaciones recurrentes de tipo común.

4.3. Resolver la ecuación de recurrencia usando la ecuación característica.

4.3.1. Recurrencias homogéneas

El punto de inicio es la solución de una recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes.

Esto es, recurrencias de la forma $\mathbf{a_0t_n+a_1t_{n-1}+...+a_kt_{n-k} = 0}$ **(*)**

Donde

I. los t_i son los valores que estamos buscando. La recurrencia es lineal porque ella no contiene términos de la forma $\mathbf{t_i * t_{i+j}}$, $\mathbf{t_i 2}$, etc.

II. los coeficientes $\mathbf{a_i}$ son constantes; y

III. la recurrencia es homogénea por qué la combinación lineal de los $\mathbf{t_i}$ es igual a 0.

Después de un momento de intuición podemos sugerir buscar la solución de la forma

$t_n = x_n$

donde x es una constante, por ahora desconocida. Si sustituimos esta solución tentativa en (*), obtenemos:

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_kx^{n-k} = 0.$

Esta ecuación es satisfecha si x = 0, una solución trivial que no es de interés, o si no, si

$a_0x^k+a_1x^{k-1}+...+ak = 0.$

Esta ecuación de grado k en x es llamada la ecuación característica de la recurrencia (*).

Suponer que r_1, r_2, ..., r_k son k raíces de la ecuación característica y que ellas son todas diferentes. Es fácil verificar que la combinación lineal

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i\, r_i^{\,n}$$

de términos rin es una solución de la recurrencia (*), **donde las k constantes c_1, c_2,...,c_k son determinadas por las condiciones iniciales**. (Se necesitan exactamente k condiciones iniciales para determinar los valores de estas k constantes). Un hecho notable, que no probaremos aquí, es que (*) tiene solamente soluciones de esta forma.

Ejemplo 4. Considerar la recurrencia

$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$

sujeta a las condiciones

$t_0 = 0,\ t_1 = 1.$

Solución:

La ecuación característica de la recurrencia es

$x^2 - 3x - 4 = 0$

por tanto

$(x-1)(x+4) = 0$

cuyas raíces son $r_1 = -4$ y $r_2 = 1$. La solución general por tanto tiene la forma

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i\, r_i^{\,n}$$

$\mathbf{t_n = c_1(-4)^n + c_2 1^n.}$

La condición inicial ($t_0 = 0$, $t_1 = 1$) da como resultado

$c_1 + c_2 = 0 \qquad n = 0$

$-4c_1 + c_2 = 1 \qquad n = 1$

esto es, $c_1 = -1/5$, $c_2 = 1/5$.

Obtenemos finalmente

$t_n = 1/5[4^n - (-1)^n].$

El asistente Mathematica posee el comando RSolve[⬚] para resolver ecuaciones recurrentes, para este caso el comando adopta la forma:

RSolve[{a[n]==3a[n-1]+4a[n-2],a[0]==0,a[1]==1},a[n],n]

Y el resultado que devuelve es:

$$\{\{a[n] \to \frac{1}{5}((-1)^{1+n} + 4^n)\}\}$$

¡Tarea!

a) Son iguales o diferentes las respuestas calculadas por el procedimiento explicado y con el asistente Mathematica ¿Por qué en una fórmula (-1) aparece elevado a "n" y en la otra a "1+n"?

b) Deduzca la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci, considerando la recurrencia

$t_n = t_{n-1}+t_{n-2}$ $n \geq 2$ sujeta a las condiciones $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

c) Considere la recurrencia $t_n = 5t_{n-1}-8t_{n-2}+4t_{n-3}$ $n \geq 3$
Sujeta a las condiciones $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Nota: Para el problema 3 la ecuación característica tiene raíces múltiples (que se repiten), en este caso la solución se da bajo la siguiente condición:

Si m es la multiplicidad de la raíz r, entonces

$t_n = r^n$, $t_n = nr^n$, $t_n = n^2r^n$, ..., tn = nm-1rn son todas las posibles soluciones de (*).

Por eso la solución de esta ecuación es:

$t_n=(2)^{n+1}-n(2)^{n-1}-2$

Solución:

$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0$ Ecuación homogénea

Ecuación característica $x^3-5x^2+8x-4=0$

Determinando raíces:

1	-5	8	-4	
	1	-4	4	1
1	-4	4	0	

$$(x^2-4x+4)(x-1)=0$$
$$(x-2)^2(x-1)=0$$

Las raíces son: $r_1=1, r_2=2, r_3=2$ es decir, tiene una raíz doble, por tanto se sigue el modelo $t_n=r^n$, $t_n=nr^n$

$t_n=c1(1)^n+c2(2)^n+c3n(2)^n$

Tomando los valores iniciales se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C1+C2 & =0\ para\ n=0\ y\ t_0=0 \\ C1+2C2+2C3 & =1\ para\ n=1\ y\ t_1=1 \\ C1+4C2+8C3 & =2\ para\ n=2\ y\ t_2=2 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$C1=-2;\quad C2=2;\quad C3=-\frac{1}{2}=-2^{-1}$$

Con lo que la respuesta final es:

$t_n=-2+2(2)^n-2^{-1}\,n(2)^n$

De donde resulta: $t_n=(2)^{n+1}-n(2)^{n-1}-2$

Es conveniente destacar que $t_n=c1(1)^n+c2(2)^n+c3n(2)^n$ representa una familia de expresiones explícitas con las que se obtiene la misma sucesión que con la expresión recursiva $t_n=5t_{n-1}-8t_{n-2}+4t_{n-3}$ una de cuyas soluciones particulares es $t_n=(2)^{n+1}-n(2)^{n-1}-2$ atendiendo a los valores iniciales

$t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, pero para otros valores iniciales como pudieran ser $t_0=-1$, $t_1=2$, $t_2=-2$ entonces el sistema de ecuaciones tendría la forma

$$\begin{matrix} C1+C2 & =-1\ para\ n=0\ y\ t_0=-1 \\ C1+2C2+2C3 & =2\ para\ n=1\ y\ t_1=2 \\ C1+4C2+8C3 & =-2\ para\ n=2\ y\ t_2=-2 \end{matrix}$$

Siendo las soluciones del sistema *C1=14; C2=13; C3=-5*

Por lo que la solución de la ecuación recurrente es:

$t_n=13(2)^n-5n(2)^n+14=2^n\,(13-5n)+14$

d) Sea la recurrencia $a_n = 2(a_{n-1}-a_{n-2})$
Sujeta a las condiciones $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

En este problema la ecuación característica no tiene raíces reales

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ cuyas son: $\{r_1 = 1 - i\}, \{r_2 = 1 + i\}$

De este resultado se tiene: $a_n = C1(1-i)^n + C2(1+i)^n$

Tomando los valores iniciales se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C1 + C2 \ = 1 \, para \, n = 0 \, y \, a_0 = 0 \\ C1(1-i) + C2\,(1+i) \ = 2 \, para \, n = 1 \, y \, a_1 = 1 \end{cases}$$

Cuya solución es: $C1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, C2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

Resultando $a_n = \frac{(1+i)}{2}(1-i)^n + \frac{(1-i)}{2}(1+i)^n$

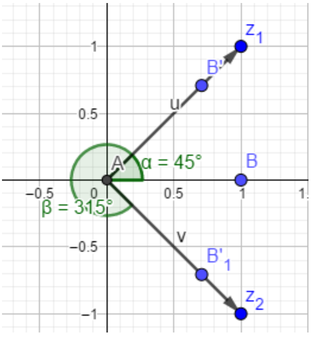
Otra expresión equivalente obtenida con el asistente Mathematica es:

$$a[n] \to (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})((1-i)^n - i(1+i)^n)$$

¡Tarea!

Demuestre que las dos expresiones son equivalentes.

Otra forma de resolver el problema empleando la forma trigonométrica de los números complejos:



De: $a_n = C1(1-i)^n + C2(1+i)^n$ se tiene:

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1-i)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\,sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

De lo anterior se puede concluir que:

$$a_n = C1(1-i)^n + C2(1+i)^n$$

$$a_n = C1\sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\ sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) + C2\sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\ sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$a_n = \sqrt{2}^n\left[(C1+C2)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + (C1-C2)i\ sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] \text{ (1)}$$

Haciendo $k1 = C1+C2$ y $k1 = (C1-C2)i$ para $n=0$ y $n=1$ se tiene el sistema:

$$\begin{cases} k1\cos(0) + k2\ sen(0) = 1 \\ \sqrt{2}\left[\mathrm{k1}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + k2\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $\mathrm{k1}=1$, $\mathrm{k2}=1$

Sustituyendo en (1) se tiene: $a_n = \sqrt{2}^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Esta expresión es equivalente a las dos obtenidas anteriormente.

4.3.2. Recurrencias no homogéneas

De las ecuaciones no homogéneas estudiaremos las que pueden reducirse al tipo:

$$a_0t_n + a_1t_{n-1} + \cdots + a_kt_{n-k} = b^np(n)$$

En esta expresión se puede observar que el miembro izquierdo coincide con el de las ecuaciones homogéneas estudiadas pero el miembro derecho es b^n p(n), donde:

i. b es una constante; y

ii. $p(n)$ es un polinomio de grado d en la indeterminada n.

Aunque en la solución de estas ecuaciones es posible resolver problemas particulares de este tipo mediante artificios matemáticos, un método general para resolverlos es mediante la obtención de una ecuación característica análoga a la obtenida para resolver las ecuaciones homogéneas, añadiendo un factor relacionado con los datos del miembro derecho como se muestra en la siguiente expresión:

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

El esquema del algoritmo a seguir se muestra a continuación:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

p(n) es de grado d

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b)^{d+1} = 0$$

Para dar solución a este tipo de ecuaciones el problema se reduce a:

a) Plantear la ecuación en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

b) Identificar la constante b y el grado del polinomio p(n) dentro de las múltiples formas que puede adoptar la expresión b^n p(n)

c) Plantear la ecuación $(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b)^{d+1} = 0$

d) Proceder según el algoritmo utilizado para las ecuaciones homogéneas:

   a) Encontrar las raíces de la ecuación.
   b) Plantear la solución general $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \, r_i^{\,n}$
   c) Encontrar los valores particulares de C_i a partir de los valores iniciales y la solución del sistema de ecuaciones correspondiente.
   d) Dar la solución particular según existan o no soluciones múltiples.

Ejemplo 5.

Resolver la ecuación de recurrencia no homogénea:

$$a_n - 2a_{n-1} = 3^n (n + 5)$$

Siguiendo el modelo planteado, del miembro izquierdo resulta la expresión:

(x-2)

De miembro derecho por ser *b=3* y *p=1* (grado del polinomio *p(n)=n+5* se tiene la expresión: $(x-3)^2$que al unirlas resulta la ecuación:

$(x-2)\ (x-3)^2=0$

La ecuación característica tiene raíces dobles, por lo que la solución general es tiene la forma:

$$a_n = C1(3)^n + C2n(3)^n + C3(2)^n$$

Para valores iniciales $a_0 = -15 \quad a_1 = -12 \quad a_2 = 39$ se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C1 \qquad\qquad + C3 = -15 \\ 3C1 + 3C2 + 2C3 = -12 \\ 9C1 + 18C2 + 4C3 = 39 \end{cases}$$

Soluciones del sistema $C1 = 9, C2 = 3, C3 = -24$

La solución particular para los valores iniciales es:

$$a_n = 9(3)^n + 3n(3)^n - 24(2)^{n+1}$$

$$a_n = (3)^{n+2} + n(3)^{n+1} - 3(2)^{n+3}$$

Como una constatación de los resultados alcanzados se muestran dos tablas generadas con asistente Mathematica, la primera con la fórmula recursiva, la segunda con la fórmula explícita:

$$\text{RecurrenceTable}[\{a[n] - 2 * a[n-1] == 3^n * (n+5), a[0] == -15\}, a, \{n, 0{,}10\}]$$

$$\{-15, -12{,}39{,}294{,}1317{,}5064{,}18147{,}62538{,}210369{,}696300{,}2278335\}$$

$$\text{Table}[3^{i+2} + i * 3^{i+1} - 3 * 2^{i+3}, \{i, 10\}]$$

$$\{-12{,}39{,}294{,}1317{,}5064{,}18147{,}62538{,}210369{,}696300{,}2278335\}$$

Mathematica da una solución equivalente con la sentencia RSolve

$$\mathbf{RSolve}[\{\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}] - \mathbf{2}\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n} - \mathbf{1}] == \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} * (\boldsymbol{n} + \mathbf{5}), \boldsymbol{a}[\mathbf{0}] == -\mathbf{15}, \boldsymbol{a}[\mathbf{1}] == -\mathbf{12}, \boldsymbol{a}[\mathbf{2}] == \mathbf{39}\}, \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}], \boldsymbol{n}]$$

$$a[n] \to -3(2^{3+n} - 3^{1+n} - 3^n n)$$

Con ella también se obtienen los mismos resultados:

$$\text{Table}[-3(2^{3+n} - 3^{1+n} - 3^n n), \{n, 10\}]$$

$$\{-12{,}39{,}294{,}1317{,}5064{,}18147{,}62538{,}210369{,}696300{,}2278335\}$$

En el problema resuelto fue fácil identificar los elementos necesarios en la expresión b^n p(n), en este caso 3^n (n+5) pero pueden darse las siguientes situaciones:

a) $a_n-2a_{n-1}=3^n\ 7$ en este caso p(n)=7, polinomio de grado 0 y entonces la ecuación característica es $(x-2)\ (x-3)^{0+1}=0$ $(x-2)\ (x-3)^1=0$. La misma situación se daría con $a_n-2a_{n-1}=3^n$ pero en este caso p(n)=1

b) Problema análogo sucedería con la ausencia de la expresión b^n como en la ecuación $a_n-2a_{n-1}=(n+5)$, en este caso $b^n=1^n$ y la ecuación característica adoptaría la forma $(x-2)\ (x-1)^2=0$

c) Finalmente, ante la ecuación an-$2a_{n-1}=7$, la ecuación característica es (x-2)(x-1)=0 dado que $b^n=1^n$ y p(n)=7 es un polinomio de grado 0

Ejercicios propuestos (2):

a)Resuelva la relación de recurrencia indicada para las condiciones iniciales que se señalan:

Ecuaciones	**Respuestas**
$a_n = -3a_{n-1};\ a_0 = 2$	$a[n] \to 2(-3)^n$
$a_n = a_{n-1} + n;\ a_0 = 0$	$a[n] \to \frac{1}{2}n(1+n)$
$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2};\ a_0 = 1;\ a_1 = 0$	$\{a[n] \to -2^n(-2+2^n)$
$a_n = a_{n-1} + 1 + 2^{n-1};\ a_0 = 0$	$a[n] \to -1 + 2^n + n$
$a_n = (\log 2n)a_{n-1} - [\log(n-1)]a_{n-1}$	
$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2};\ a_0 = a_1 = 1$	$a[n] \to -3^{-1+n}(-3+2n)$
$9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2};\ a_0 = 6;\ a_1 = 5$	$a[n] \to 3^{1-n}(2+3n)$

b) La población de Utopía aumenta en un 5% por año. En 2000 la población era 10,000. ¿Cuál era la población en 1970?

Respuesta

El planteamiento de la ecuación recursiva en el Mathematica fue:

$$\mathrm{RSolve}[\{a[n] == a[n-1] - (\frac{5}{100}) * a[n-1], a[0] == 10000\}, a[n], n]$$

La función explícita obtenida fue: $a[n] \to 4^{2-n}5^{4-n}19^n$

Convirtiendo esta esta expresión y evaluándola en 30, (tiempo transcurrido del 2000 a 1970) se obtuvo:

$$f[\text{n\_}] := \text{IntegerPart}[N[4^{2-n}5^{4-n}19^{n}]]$$

$$f[30] = 2146$$

Explique usted la función recursiva y obtenga la explícita.

c) Si P_n denota el número de permutaciones de n objetos diferentes,

d)encuentre una relación de recurrencia y una condición inicial para la sucesión P_1, P_2, ...

Respuesta $P_n \begin{cases} P_1 = 1 \\ P_n = nP_{n-1} \end{cases}$

e) Sea la sucesión definida por $S[n] = \frac{(S[n-1]+S[n-2])}{2}$ con $S[1] = 0;\ S[2] = 1$ Calcule S[3] y S[n] Suponga una fórmula para Sn y use inducción matemática para demostrar que es correcta.

Respuestas Los términos de la sucesión son $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{11}{16},\frac{21}{32},\frac{43}{64},\frac{85}{128},\frac{171}{256}\right\}$

Una fórmula a probar por inducción completa es $S[n] = \frac{1}{3}2^{1-n}(2(-1)^n + 2^n)$

4.4. Ecuaciones funcionales, introducción

En el transcurso de libros anteriores estudiamos ecuaciones algebraicas, tales como:

» De primer grado: $5x + 1 = 8$.

» De segundo grado: $x^2+3x-5=0$

» Polinómicas: $x^4+3x^3-5x^2+8x+9=0$

» Racionales: Cuando uno o ambos miembros de la ecuación se expresan como un cociente de polinomios.

En este libro se han estudiado las ecuaciones trascendentes: cuando involucran funciones no polinómicas, como las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas, etc.

En estas ecuaciones los resultados han sido números que satisfacen las condiciones de cada una de las ecuaciones, pero en este capítulo se estudiaron las ecuaciones recurrentes que consisten en **encontrar una fórmula explícita para el término general an. que ha sido dado mediante una expresión recurrente.**

Ahora estudiaremos las ecuaciones funcionales: cuando la incógnita es una función.

Problema Ec_Func. 1. Determine todas las funciones f que cumplan:

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}: \; x^4 f^2(x) + \; x^2 f(x) - 2 = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Si utilizando la vista CAS (cálculo simbólico) del GeoGebra y en ella sustituimos f(x) por f y utilizamos el comando Soluciones(<Ecuación>, <Variable>) como se muestra en Figura 4.6 se obtiene como solución dos funciones.

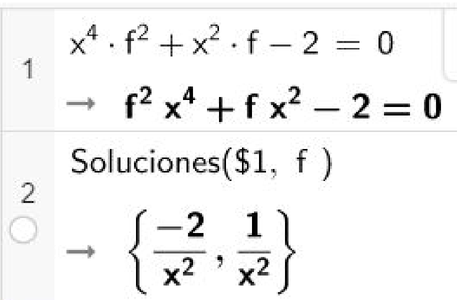


Figura 4. 6 solución de una ecuación fun-cional en la vista CAS del GeoGebra.

Las funciones que devuelve el GeoGebra como solución de la ecuación las denominaremos: $f_1(x) = \frac{-2}{x^2}$; $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ cuyos gráficos se muestran en Figura 4.7.

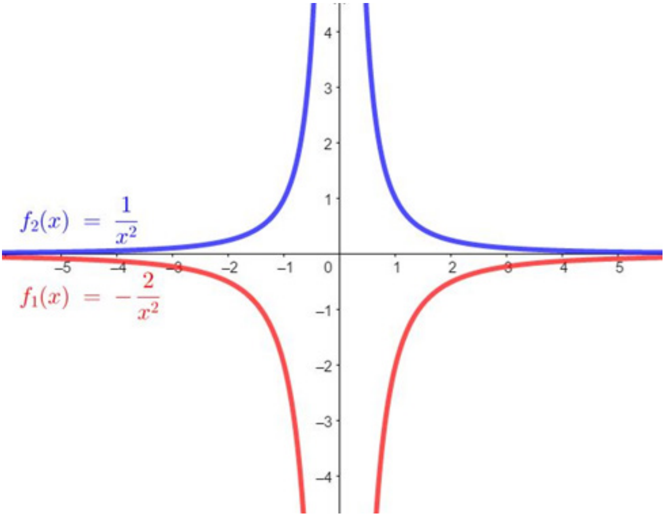


Figura 4. 7 Gráfico de las soluciones de la ecuación funcional

$x^4 f^2(x) + x^2 f(x) - 2 = 0$

Pero lo más importante es verificar si las soluciones de la ecuación funcional realmente satisfacen la ecuación original como se muestra a continuación:

$x^4 f^2(x) + x^2 f(x) - 2 = 0$ (I)

Sustituyendo $f(x)$ por $f_1(x) = \frac{-2}{x^2}$ en (I) se tiene:

$$x^4\left(\frac{-2}{x^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{-2}{x^2}\right) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

Sustituyendo $f(x)$ por $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ en (I) se tiene:

$$x^4\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Por tanto ambas satisfacen la ecuación (I)

¿Cómo se hubiese resuelto esta ecuación “manualmente”?

Evidentemente, $x^4 f^2(x)+ x^2 f(x)-2=0$ es una ecuación de segundo grado con variable f(x), por tanto, es posible identificar en ella los siguientes parámetros:

$a=x^4$; $b=x^2$; $c=-2$

Sustituyendo esto valores en la fórmula que da solución a la ecuación de segundo grado: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se tiene:

$$\frac{-x^2\pm\sqrt{x^{2^2}-4x^4(-2)}}{2x^4}=\frac{-x^2\pm\sqrt{9x^4)}}{2x^4}=\frac{-x^2\pm 3x^2}{2x^4}=\begin{cases}\frac{2x^2}{2x^4}=\frac{1}{x^2}\\ \frac{-4x^2}{2x^4}=\frac{-2}{x^2}\end{cases}$$

4.5. Algunos métodos para resolver ecuaciones funcionales.

Después de haber resuelto la primera ecuación funcional parece que esto no es tan complicado, pero no se embulle, por en realidad no es así, al menos los especialistas dicen que:

“Resolver una ecuación funcional es resolver un problema matemático”.

Con esto expresan que: NO EXISTEN fórmulas o algoritmos que permitan, mediante su aplicación, la solución satisfactoria de toda ecuación funcional; no obstante, existe algunos tipos de ecuaciones que por presentar estructuras similares son posible resolverla por métodos similares (valga la redundancia), por eso se recomienda fijarse en los siguientes datos:

» Dominio y codominio o imagen de definición de la función.

» Condiciones extras impuestas (se trata de valores particulares que se exigen en algunos problemas o transformaciones que es posible realizar).

» Disponer de una buena cantidad de ejemplos resueltos, clasificados adecuadamente por usted, para comparar las condiciones del problema al que usted se enfrenta con los ya resueltos e inferir la posible vía de solución.

Por el momento ya usted sabe que ante una ecuación funcional que su estructura sea la de una ecuación de segundo grado en f(x) puede aplicar la fórmula de la referida ecuación.

Tareas

A partir de la ecuación resuelta le incluimos una dificultar y la resolvimos con el CAS del GeoGebra como se muestra en la Figura 4.8. trate usted de plantear la ecuación, resolverla manualmente e investigar ante qué situación nueva se encuentra.

1	$x^4 f^4 + x^2 f^2 - 2 = 0$ $\rightarrow \; \mathbf{f^4 x^4 + f^2 x^2 - 2 = 0}$
2	Soluciones($1, f) $\rightarrow \; \left\{ \frac{-1}{x}, \frac{1}{x} \right\}$
3	SolucionesC($1, f) $\rightarrow \; \left\{ i \frac{\sqrt{2}}{x}, -i \frac{\sqrt{2}}{x}, \frac{-1}{x}, \frac{1}{x} \right\}$

Figura 4. 8

i. Análogo al caso anterior en Figura 4.9 aparece otra ecuación funcional resuelta con CAS del GeoGebra, pero ahora tiene 4 soluciones con funciones de variable real, trate usted de plantear la ecuación, resolverla manualmente e investigar ante qué situación nueva se encuentra.

1	$x^4 f^4 - 5x^2 f^2 + 4 = 0$ $\rightarrow \; \mathbf{f^4 x^4 - 5 f^2 x^2 + 4 = 0}$
2	Soluciones($1, f) $\rightarrow \; \left\{ \frac{2}{x}, \frac{-2}{x}, \frac{-1}{x}, \frac{1}{x} \right\}$

Figura 4. 9

Determine todas las funciones f que cumplan:

ii. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f^2(x) = 4f(x) - 4, \forall x \in \mathbb{R}$

iii. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f^2(x) - 3xf(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

iv. $f:[-1,1]\rightarrow \mathbb{R}: \ cos^2 f(x) - sen^2 f(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$

v. $f:\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}: \ 4f^2(x) - 4f(x) = -(1 - log^2 x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

Veamos otra situación:

Problema Ec_Func. 2. Hallar todas las funciones f (x) tales que:

5f(3-x)-3f(x)=x^2 (I)

Solución:

Evidentemente ahora no es posible tomar f(x) como factor porque además aparece f(3-x) pero es posible hacer un “ARTIFICIO”, (casi siempre los artificios son salidas airosas).

Primer artificio: Realizamos un cambio de variable haciendo x=3-x y sustituyendo en la ecuación original se tiene:

5f(x)-3f(3-x)=(3-x)^2 (II)

Segundo artificio: Despejamos f(3-x) en (I) :

$$f(3-x) = \frac{x^2 + 3f(x)}{5}$$

Tercer artificio: sustituimos f(3-x) en (II)

Se obtiene la ecuación:

$$f(x) - 3\left[\frac{x^2+3f(x)}{5}\right] = (3-x)^2 \text{ (III}$$

Se resuelve (III); pero como hay que realizar varios cálculos algebraicos apelamos al GeoGebra y obtenemos la solución en Figura 4.10:

1 $5f - 3\,\frac{x^2+f}{5} = (3-x)^2$

$\rightarrow \ \frac{-3}{5}\,x^2 + \frac{22}{5}\,f = x^2 - 6\,x + 9$

2 Soluciones($1, f)

$\rightarrow \ \left\{\frac{4}{11}\,x^2 - \frac{15}{11}\,x + \frac{45}{22}\right\}$

Figura 4. 10

Evidentemente esta función se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{1}{11}(4x^2 - 15x + 22.5)$$

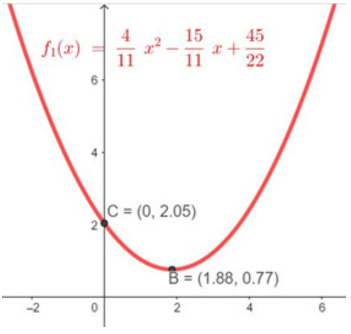


Figura 4. 11

Tarea

En la figura 4.12 se muestra la gráfica de la función que es solución de la ecuación funcional

$$x^2 - 2f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aplicando la información dada sobre soluciones de ecuaciones funcionales, encuentre la solución. Le sugerimos utilizar el GeoGebra como se ha mostrado anteriormente.

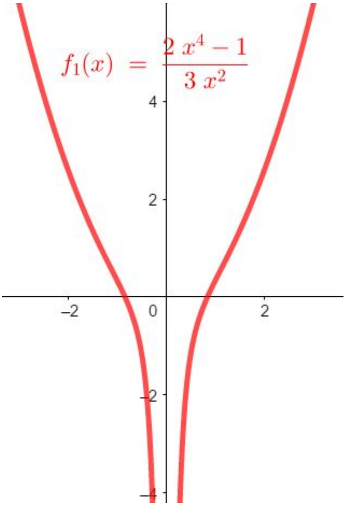


Figura 4. 12

Problema Ec_Func. 3. Hallar todas las funciones f (x) tales que:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}: f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Solución

Aquí también se realizará un cambio de variable, pero con menos astificio y más algoritmo.

Evidentemente, lo más conveniente es que la función f esté en una sola variable, porque la expresión x^2 se puede "manipular" algebraicamente con más facilidad, por tanto es coveniente tener f(z) y para ello hay que hacer

$$z = \frac{x}{x+1} \; \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow zx + z = x \Rightarrow x = \frac{z}{1-z} \forall\, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Sustituyendo en la ecución original se tiene:

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^2$$

HEMOS LLEGADO A LA SOLUCIÓN.

Sustituyendo $z = \frac{x}{x+1}$ en la ecuación se tiene

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^2$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)}{1-\frac{x}{x+1}}\right)^2 = x^2 \text{ (verfíquelo el lector)}$$

El problema está en que para $\frac{x}{x+1}$ la condición era $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Mientras que $\frac{z}{1-z}$ tiene por condición $\forall\, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ de modo que la condición original no puede omitirse.

Tareas:

Hallar todas las funciones f (x) tales que:

i. $f: \mathbb{R} \setminus]-2,2[\rightarrow \mathbb{R}: f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \; \forall\, x \in \mathbb{R}^*$

Sugerencia, haga $t = x + \frac{1}{x}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (verifíquelo)

ii. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x-2) = x^2 - 4x, \forall\, x \in \mathbb{R}$

iii. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* : f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*$

iv. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Sugerencia llegue a la solución que se muestra en Figura 4.13

1 $(1-x)^2 \cdot (2x - x^4 - x^2 f) + f = 2(1-x) - (1-x)^4$

$\rightarrow \ \mathbf{(-x+1)^2\,(-x^4 - f\,x^2 + 2\,x) + f = -(-x+1)^4 + 2\,(-x+1)}$

2 Soluciones($1, f)

$\rightarrow \ \{\mathbf{-x^2+1}\}$

Figura 4. 13

v. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

Sugerencia llegue a la solución cuyo gráfico se muestra en Figura 4.14

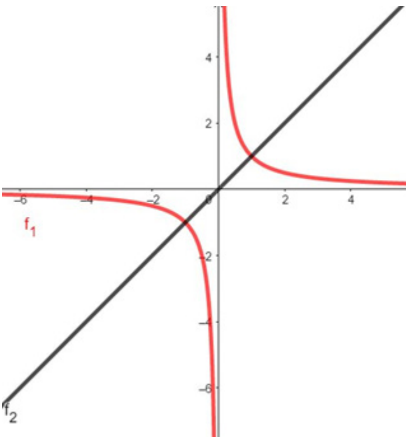


Figura 4. 14

vi. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x^2 + \frac{1}{x} = \left(f(x)\right)^2 + \frac{1}{f(x)}, \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

Sugerencia llegue a la solución cuyo gráfico se muestra en Figura 4.15

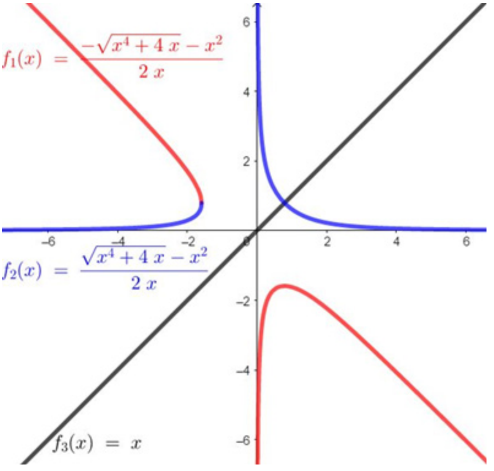

$f_1(x) = \frac{-\sqrt{x^4 + 4x} - x^2}{2x}$
$f_2(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4x} - x^2}{2x}$
$f_3(x) = x$
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6

Figura 4. 15

Bibliografía

Alonso, I. (2001). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. (Tesis doctoral). Universidad de Oriente.

Álvarez Saiz, E. (2015). Ejercicios resueltos: Funciones de varias variables. Universidad de Cantabria.

Álvarez, C. (1995). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Ministerio de Educación Superior.

Arya, J., Lander, R., & Ibarra, V. H. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la Economía. Pearson Educación.

Babini, J. (1979). Historia de las ideas modernas en matemática. Universidad de Buenos Aires.

Bell, E. T. (2010). Los Grandes Matemáticos. Tauro.

Bransford, J. D., & Stein, B. S. (1986). The ideal problem solver. A guide for improving thinking, learning and creativity. Freeman and Company.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1998). Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación.

Conner, C. D. (2009). Historia popular de la ciencia. Mineros, comadronas y mecánicos. Científico Técnica.

Courant, R., & Robins, H. (1979). ¿Qué es la Matemática? Aguilar

Davidson, L. J., Reguera, R., Frontela, R., & Díaz, M. (2005). Problemas de Matemática Elemental. Pueblo y Educación.

Demidovich, B. (2000), Problemas y ejercicios de análisis matemático. Addison Wesley.

Díaz Gómez, J. L. (2010). Problemas Resueltos de Funciones. Universidad de Sonora.

Engels, F. (1961). Dialéctica de la naturaleza. Grijalbo.

Falconí Asanza, A., Hernández Crespo, F. M., & López Fernández, R. (2020). Matemática en Espiral. Universo Sur.

Fridman, L. M. (2000). Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas de matemática. MIR.

Fundación Wikimedia. (2020). Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

Galindo, E., & Gortaire, D. (2006). Matemáticas Superiores, teoría y ejercicios. Prociencia editores.

García Garrido, L. (2012). Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Lógica. Universidad de La Habana.

García Leal, D. (1990). Anillos y Polinomios. Editorial Pueblo y Educación.

Hohenwarter, M. (2019). GeoGebra Manual Oficial. http://www.geogebra.org

Jungk, W. (1982). Conferencia sobre metodología de la enseñanza matemática. (Tomo II). Editorial Pueblo y Educación.

Kalnin, R. A. (1988). Algebra Y Funciones Elementales. Editorial MIR.

Kurosch, A. G. (1977). Curso de Álgebra Superior. Editorial MIR.

Labarrere, A. (1994). Pensamiento. Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos. Ángeles Editores.

Lara, J., & Arroba, J. (2012). Análisis Matemático. Universidad Central del Ecuador.

Leal Acosta, M., Ron Galindo, J., Báez Arbesú, L., Navarro Casabuena, L., Oramas Hernández, C., Reyes Abreu, D., & Gil Carrabeo, C. (2015). Estructuras algébricas y polinomios. Pueblo y Educación.

Lehmann, C. H. (1966). Geometría Analítica. Edición Revolucionaria.

Livio, M. (2006). ¿Es Dios un matemático? www.librosmaravillosos.com

López Fernánez, R., Crespo Borges, T., Crespo Hurtado, E., & Palmero Urquiza, D. E. (2021). Elementos de Funciones Algebraicas (Tomo I). Universo Sur.

Luzuriaga, M. (junio de 2020). El paraboloide hiperbólico de concreto armado en el Ecuador. DAYA. Diseño, Arte y Arquitectura, (8), 233-256.

Marqués, P. (2011). Impacto de las TIC en el mundo educativo. Funciones y limitaciones de las TIC en educación. http://dewey.uab.es/pmarques/siyedu.htm

Mason, F. (1985). Phenomenography. Describing conceptions of the worl arounds Instructional Science, 10, 117-200.

Mayer, F. (1983). Describing and improving learning. En, R. R. Schemeck (Ed), Styles and strategies of learning. (pp. 83-100). Plenum.

Micheline, C., & Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En, Las capacidades humanas. (pp. 293-323). Ed. Labor Universitaria.

Ochoa Rojas, R. (2008). Funciones y temas afines (Vol. II). Pueblo y Educación.

Pérez, M. P. (1993). La solución de problemas en Matemática. UAM.

Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Ed. John Wiley and Sons.

Sánchez, L. (2015). Iniciação ao estudo das funções Reais de variável real. Universidade de Lisboa.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematics, technology and higher order thinking. in technology in education series. LEA Publishers.

Sessa, G. F. (2015). Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Editorial Universitaria.

Spiegel, M. R. (2010). Algebra Superior. McGraw-Hill.

Stewart, J. (2011). Cálculo con trascendentes tempranas. Editorial Pueblo y Educación.

Swokowski, E., & Cole, J. (2007). Algebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo Editorial Ibero América.

Thomas, G. (2010). Cálculo en una variable. Addison Wesley.

Torres Lima, P. (1997). Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. (Tesis Doctoral). ISP Capitán Silverio Blanco.

Wiltrock, R. (1990). Comprensión y representación. Macmillan Publishing Company.

Wooton, W., Beckenbach, E. F., & Fleming, F. J. (1985). Geometría Analítica Moderna. Cultural S. A.

Por todos es conocido que el concepto de función trasciende a todas las ramas de la matemática, desde las tradicionales álgebra y análisis matemático, geometría, trigonometría y la estadística hasta las más contemporáneas, en todas las funciones forman parte de su sistema conceptual en forma directa o indirecta, por eso, la formación de este concepto desde la enseñanza primaria y muy en particular en la enseñanza media y media superior resulta fundamental, para que al llegar los alumnos a niveles superiores, no aparezcan brechas que limiten el avance en los estudios, los ejemplos son innumerables y los docentes bien los conocemos, pero las funciones trascendentes tiene además un halo casi misterioso de particular significación; tal es así, que la fórmula más bella de la matemática creada por Leonard Euler: $e^i\pi+1=0$ involucra los números trascendentes más importantes: e, número de Euler y π, la longitud de la semicircunferencia unitaria; al mismo tiempo, ellos están relacionados con las unidades más significativas de la matemática: i, la unidad imaginaria; 1, el elemento neutro para el producto; 0, el elemento neutro para la suma; además, en la fórmula aparecen las tres operaciones importantes de la aritmética: adición, multiplicación y exponenciación. Inspirados en esta idea, los autores han intentado acercar estas funciones a la vida; mostrando que las expresiones exponenciales y logarítmicas permiten explicar la desintegración de substancias radioactivas, los procesos de crecimiento biológico y de la producción social; la curva del olvido; la intensidad sonora y el pentagrama se explican mediante estas funciones; mientras la espiral logarítmica, está presente en la forma de las galaxias, la tela de una araña, la cámara de la concha de un nautilus y el vuelo del halcón peregrino; finalmente, las funciones hiperbólicas son recreadas en el interior de la Iglesia Cristo del Consuelo, los arcos catenarios en la Iglesia de Saint Martin en Donges, Francia y los Puentes colgantes que conducen al mirador de La Cascada de Río Verde, Cascada de Río Verde Chico; o Cascada Pailón del Diablo; está situada en los Andes del Ecuador.

EDITORIAL UNIVERSO SUR

FUNDACIÓN METROPOLITANA

ISBN: 978-959-257-643-8

9 789592 576438