ELEMENTOS
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS
TOMO I

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

UMET
UNIVERSIDAD METROPOLITANA

ELEMENTOS
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS
TOMO I

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

UMET
UNIVERSIDAD METROPOLITANA

ELEMENTOS

DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

TOMO I

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
TOMÁS PASCUAL CRESPO BORGES
ERIC CRESPO HURTADO
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

UMET
UNIVERSIDAD
METROPOLITANA

Diseño de carátula: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Edición: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Corrección: MSc. Isabel Gutiérrez de la Cruz

Dirección editorial: Dr. C. Jorge Luis León González

ISBN: 978-959-257-616-2

EDITORIAL UNIVERSO SUR

Editorial: “Universo Sur”.

Universidad de Cienfuegos. Carretera a Rodas, Km 3 ½.

Cuatro Caminos. Cienfuegos. Cuba.

CP: 59430

INTRODUCCIÓN

Es indudable que el concepto de función trasciende a todas las ramas de la matemática, desde las tradicionales álgebra y análisis matemático, geometría, trigonometría y la estadística hasta las más contemporáneas, en todas las funciones forman parte de su sistema conceptual en forma directa o indirecta, por eso, la formación de este concepto desde la enseñanza primaria y muy en particular en la enseñanza media y media superior resulta fundamental, para que al llegar los alumnos a niveles superiores, no aparezcan brechas que limiten el avance en los estudios, los ejemplos son innumerables y los docentes bien los conocemos.

Partiendo de estas realidades, hemos querido volcar en estas páginas la experiencia de algunos años de trabajos con estudiantes de distintos niveles de enseñanza explicando funciones y otros temas colaterales como son los casos de las ecuaciones, las inecuaciones y los sistemas, que en ocasiones se tratan separados unos de otros como si estuvieran divorciados.

No es nuestro propósito sustituir los libros de textos escolares, estos han sido escritos por profesionales de alto nivel y con objetivos muy bien definidos, más bien lo que pretendemos es complementar estos textos, aprovechando las posibilidades que ofrecen los medios de cómputos y las motivaciones que tienen los alumnos por su empleo.

En el libro se proyectan 4 ideas esenciales:

1. El tratamiento de los conceptos fundamentales relacionados con funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.
2. El tratamiento “manual” de algoritmos relacionados con funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, con el propósito que el posterior tratamiento computacional de esos algoritmos no sea visto como una “caja negra”.
3. El tratamiento computacional de los algoritmos mencionados en (2) y la interpretación de los resultados que los mismos ofrecen.
4. Contribuir a la cultura general de los lectores a partir de lo que se ha llamado “pinceladas históricas”, porque consideramos que la matemática y su historia forman parte de la cultura universal.

Por el gran volumen de información que existe sobre el tema que nos ocupa y porque no estamos en tiempos de libros voluminosos que aterran al lector, hemos proyectado dos libros:

TOMO I: FUNCIONES ALGEBRAICAS.

Aquellas que pueden ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracción de raíces, tales son los casos de los polinomios, las funciones racionales y las funciones irracionales.

TOMO II: FUNCIONES TRASCENDENTES

Las funciones que trasciende al álgebra en el sentido que no puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas, tales son los casos de las funciones exponenciales y logarítmicas, las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas y las combinaciones de estas, entre otras.

Estos dos conceptos no siempre están muy bien definidos para diferenciarlos, particularmente por los alumnos que finalizan la enseñanza media y media superior.

A continuación, daremos una síntesis de lo que se trata en cada capítulo y la intención de los autores en cada uno de ellos:

CAPITULO I: **El concepto de función**, está dedicado al estudio de este concepto, pero consciente de que los lectores pueden estar familiarizados con el mismo, por eso, al tiempo que se introduce el concepto se fundamenta y sistematiza. Por eso, para que el lector comprenda su importancia y lo difícil que ha sido para la ciencia arribar a él, es el único tema que comienza con un análisis histórico de su evolución. En el capítulo se comienza a utilizar el asistente GeoGebra para graficar funciones, porque el gráfico juega un papel fundamental para que el lector se apropie del concepto de función y los de dominio e imagen de una función.

CAPITULO II: **Funciones y operaciones entre relaciones funcionales**. El capítulo se orienta a definir y aplicar las operaciones sumas, producto y composición de funciones, pero antes se definen funciones elementales para operar con ellas, estas funciones son:

la función constante, la idéntica, la modular, la cuadrática, la cúbica y la recíproca; a partir de ellas se obtienen otras funciones que son estudiadas en el capítulo.

CAPITULO III: **Las funciones y sus propiedades globales**. Estas propiedades son: Dominio e imagen, extremos globales, ceros, signos y puntos fijos, simetría y paridad; inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, monotonía y continuidad. En el capítulo son tratadas en forma general o tomando como ejemplos las funciones elementales definidas en el capítulo anterior. Por la importancia de este tema como base para el estudio de las funciones se retoma en los restantes capítulos al analizar cada función estudiada. Para el tratamiento de algunas de estas propiedades se necesitan conocimientos de matemática superior que se suplen por el tratamiento gráfico, particularmente, al analizar la monotonía, llegando hasta la introducción de forma intuitiva del concepto de derivada y de máximo y mínimo, utilizando comandos del GeoGebra.

CAPITULO VI: **Las funciones lineales**. Se hace un estudio detallado de la función lineal, incluyendo tratamientos de la Geometría Analítica y sus ecuaciones paramétrica y vectorial. Se resuelven ecuaciones e inecuaciones lineales, así como sistemas de ecuaciones.

CAPITULO V: **Las funciones cuadráticas**. Se hace un estudio detallado de la función cuadrática y de las ecuaciones cuadráticas incluyendo las soluciones complejas; también se estudian las inecuaciones cuadráticas, las ecuaciones bicuadráticas, las ecuaciones binomias combinadas con las bicuadrática entre otras. Por su relación con la función cuadrática se estudia la función raíz cuadrada que posteriormente se profundiza al estudiar las funciones irracionales. Finalmente se estudian los sistemas de ecuaciones con ecuaciones cuadráticas.

CAPITULO VI: **Las funciones polinómicas**. Con funciones polinómicas se extiende el concepto de función algebraica a un campo más amplio. Aquí se trata el teorema fundamental del álgebra y su historia, así como el teorema que permite la descomposición factorial. Se estudia un caso particular de ecuación polinómica, la ecuación cúbica y la polémica Cardano-Tartaglia; se tratan las propiedades de la función polinómica de grado cuarto y superior y se cierra el tema haciendo referencia a los trabajos de Abel y Galois. El capítulo finaliza con el estudio de las ecuaciones recíprocas de cuarto grado y el método de Ruffini.

CAPITULO VII: **Las funciones racionales**. Como lo indica el título, se hace un estudio de las funciones racionales, sus propiedades, ecuaciones, inecuaciones y se da una atención especial a la descomposición de fracciones en fracciones simple, por la importancia del tema para el cálculo integral.

CAPITULO VIII: **Las funciones irracionales**. Al igual que con las funciones racionales, con las irracionales se sigue el mismo esquema, con particular énfasis en las ecuaciones e inecuaciones irracionales.

CAPITULO IX: **La función modula**r. Se ha estudiado la función modular por sus propiedades similares a la función cuadrática, por el inadecuado tratamiento que en ocasiones se da a esta función y porque es base para las definiciones iniciales de cálculo diferencial, se estudian dos funciones que se basan en la modular, la función rampa y la curva nariz de bala. Al final del capítulo se plantea la solución de sistemas de ecuaciones donde intervienen expresiones modulares.

CAPITULO X: **La resolución de problemas mediante funciones, ecuaciones, inecuaciones o sistemas algebraicos**. Se decidió introducir este capítulo porque resume todo lo explicado en su posible aplicación a la resolución de problemas que son objetivos de estudio en la generalidad de programas del nivel medio superior; las soluciones de estos problemas se modelan mediante funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, pero incluimos en él algunas notas sobre la heurística y el modelo de Polya para enfrentar la resolución de problemas. Ante esta temática no es posible pasar por alto los aportes a la teoría de la resolución de problemas de Sócrates, Platón, Descartes y su "Discurso sobre el Método", Bolzano, Euler, Lagrange, Poincaré, Hadamard, Miguel de Guzmán y Schoenfeld.

Para el segundo tomo se proyectan los siguientes temas:

CAPITULO I: Funciones trascendentes, funciones exponencial y logarítmica.

CAPITULO II: Funciones trigonométricas, funciones seno, coseno y sus inversas.

CAPITULO III: Funciones tangente y cotangente y sus inversas.

CAPITULO IV: Funciones hiperbólicas, funciones seno y coseno hiperbólico y sus inversas.

CAPITULO V: Funciones tangentes y cotangente hiperbólica y sus inversas.

CAPITULO VI: Funciones recurrentes y ecuaciones recurrentes.

CAPITULO VII: Ecuaciones funcionales

Agradecemos de los lectores las valoraciones del trabajo que presentamos a su consideración,

Los autores

CAPÍTULO I.
EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

"El concepto de función aparece en cuanto se relacionan cantidades mediante una relación física determinada. El volumen de un gas encerrado en un cilindro es función de la temperatura y de la presión que ejerce el pistón. La presión atmosférica, observada en un globo, es función de su altitud sobre el nivel del mar".

(Courant & Herbert, 2006)

1.1. Pinceladas sobre la evolución histórica del concepto de función

Para tener un primer acercamiento al concepto de función y a partir de él comprender su evolución histórica. Por el momento daremos una definición intuitiva:

Una Función es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento llamado f(x) de un conjunto B.

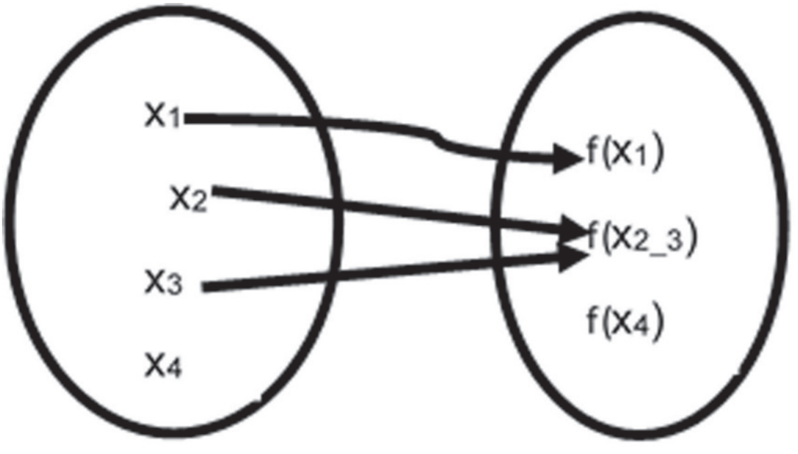


Figura 1.1. Concepto de función.

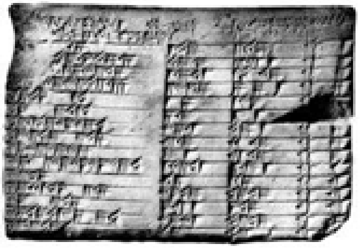


Figura 1.2

Plimpton 322, tablilla de barro de Babilonia. Contiene una tabla trigonométrica de 4 columnas y 15 filas de números en escritura cuneiforme.

Figura 1.3

Nicolás de Oresme (Normandía, 1323 – Paris 1382). Uno de los artífices de la renovación medieval antes del Renacimiento.

El concepto de función resultó ser demasiado restrictivo para las necesidades de la física matemática, por lo que la idea de función, junto con el concepto de límite, tuvo que pasar por un largo proceso de generalización y clarificación, del cual daremos una exposición sucinta.

Si consideramos que una función se puede representar mediante una tabla de valores que establezca correspondencia entre dos variables, entonces, la más antigua referencias de tales tablas aparecen en el mundo antiguo, especialmente en Babilonia. Muchas de estas tablas estaban relacionadas con datos astronómicos, en base a ellas los astrónomos babilonios pretendían buscar regularidades para predecir fenómenos que se repetían periódicamente, como los movimientos lunares y planetarios.

En la Edad Media los matemáticos comenzaron a preocuparse por el estudio de fenómenos sometidos al cambio, como el movimiento de los cuerpos, y a partir del siglo XIII aparecen los primeros trabajos relacionados con el concepto de cantidad variable al estudiar estos fenómenos de forma cuantitativa.

En el siglo XIV Nicolás Oresme (1323-1382) se interesó por el estudio del cambio y la velocidad del cambio y para representar el cambio de la velocidad con respecto al tiempo utilizó unos ejes coordenados parecidos a los sistemas de coordenadas cartesianas que utilizamos hoy en día. Pasado tres

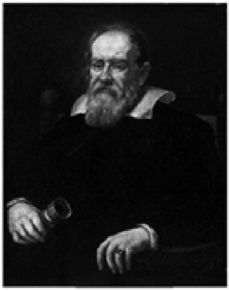


Figura 1.4

Galileo Galilei (15/02/1564 – 08/01/1642).Físico, matemático y astrónomo italiano; junto a Kepler, comenzó la revolución científica que culminó Isaac Newton.

Figura 1.5

René Descartes (31/03/1596 - 11/02/1650) Matemático, físico y filósofo francés. Introdujo en la matemática el concepto de magnitud variable.

siglos de este acontecimiento, es decir en el siglo XVII, el sabio italiano Galileo Galilei (1564- 1642) retomó el estudio del movimiento, pero desde un punto de vista cuantitativo, justificándolo experimentalmente y estableciendo leyes que establecían relaciones entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Se debe advertir que hasta ese momento una función se introducía por medio de una expresión verbal, una tabla o una gráfica.

En 1637 René Descartes (1596-1650) en su obra "La Geométrie" plantea los cimientos de la Geometría Analítica y bajo esta concepción hace que a cada curva le corresponda una ecuación, es decir interpreta curvas por medio de ecuaciones representando de esta forma la dependencia entre dos cantidades variables. Sobre este descubrimiento Federico Engels expresó en Dialéctica de la Naturaleza-

El punto de viraje de las matemáticas fue la *magnitud variable* de Descartes. Esto introdujo en las matemáticas el movimiento y, con él, la dialéctica y también, por tanto, necesariamente, el cálculo diferencial e integral, que comienza inmediatamente, a partir de ahora, y que Newton y Leibniz, en general, perfeccionaron, pero no inventaron. (Engels, 1961, p. 225)

Por su parte Pierre Fermat (1601-1665), en su obra póstuma muestra los principios fundamentales del método de las coordenadas, que posteriormente fue llamado sistema de coordenadas

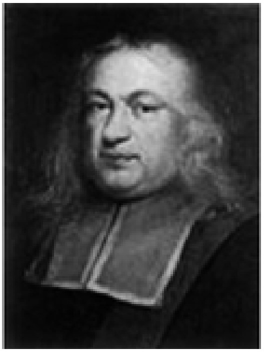


Figura 1.6

Pierre de Fermat (17/81601-12/01/1665). Jurista francés y matemático autodidacta, apodado por su obra «el príncipe de los aficionados».

Figura 1.7

Gottfried Wilhelm Leibniz (01/07/1646-14/11/1716). Filósofo, teólogo, lógico y matemático, alemán, se le reconoce como «El último genio universal».

cartesianas y en este mismo siglo Isaac Newton (1642-1707) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1647-1716) contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto de función como relación entre dos variables mediante el cálculo diferencial, a la que Newton designaría con el nombre de "fluente'', pero **Leibniz usaría por primera vez la palabra función para designar una cantidad variable de punto en punto sobre una curva**, como la longitud de la tangente, la normal, la ordenada y **en 1714, ya utilizaría definitivamente la palabra función** para designar cantidades que dependían de una variable.

Pero hubo que esperara al siglo XVIII para tener la primera definición de función como expresión analítica, definición que se debe a Jean Bernouilli (1667-1748) y en 1734 **Leonard Euler** (1707-1783) en su obra "Introductio in analysin infinitorum" **da una definitiva definición de función como una expresión analítica** formulada a partir de una cantidad variable y constantes; incluye los polinomios, las expresiones trigonométricas y logarítmicas y **utilizó, por primera vez, la notación y=f(x) para simbolizar una función.**

Finalmente, en el siglo XIX Fourier (1768-1830) al estudiar las funciones trigonométricas logró representar funciones arbitrarias por medio de funciones analíticas. Pero fue su discípulo Dirichlet (1805-1859), quien **dio en 1837 la definición de función tal y como la conocemos hoy en día:**

Figura 1.8

Leonhard Paul Euler (15/4/1707-18/09/1783) Ma-temático y físico suizo, murió en Rusia y vivió en Alemania gran parte de su vida. Es uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Figura 1.9

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/02/1805 – 05/05/1859) Matemático alemán, formado en Alemania, y Francia. Sus métodos

«Si una variable "y" está relacionada con otra variable "x" de tal modo que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, se dice que y es una función de la variable independiente x».

Concepto de función.

El epígrafe anterior finalizó con la definición de función dada por Dirichlet y con ella se comienza este epígrafe con un mayor rigor matemático.

DEFINICIÓN: Función.

Una función de un conjunto A a un conjunto B es una regla que asigna un elemento único $f(x) \in B$ a cada elemento $x \in A$.

Al conjunto A de todos los valores de entrada posibles se nombra dominio de la función o conjunto de partida.

El conjunto de todos los valores de $f(x)$ a medida que x varía en todo A se denomina ***rango o imagen*** (también conjunto de llegada o codominio) de la función, el cual puede o no incluir todos los elementos del conjunto B.

En principio, el dominio y la imagen de una función pueden ser conjuntos no numéricos.

Ejemplo:

En la Figura 1.10 se muestra la correspondencia entre dos conjuntos no numéricos, también se muestra lo proporcionaron un aspecto totalmente nuevo a la matemática y sus resultados se consideran entre los más importantes para esta ciencia.

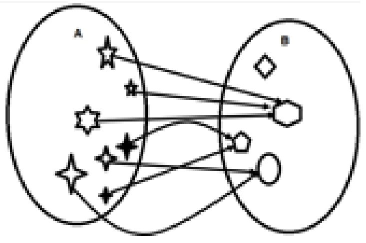


Figura 1.10

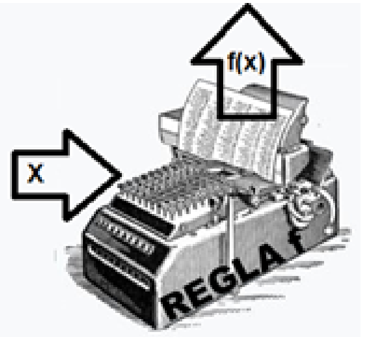


Figura 1.11

Figura 1.12

expresado anteriormente acerca de que el rango puede que no incluya todos los elementos de B, observe que hay una figura del conjunto B a la que no llega saeta alguna.

pero en cálculo suelen ser conjuntos de números reales.

La función es como una máquina que produce un valor $f(x)$ en la Figura 1.11 aparece una vieja calculadora con un teclado por donde se teclean valores de x y en su interior están las reglas mediante las cuales la máquina devuelve f(x); la Figura 1.12 muestra el símil anterior con una calculadora moderna y la Figura 1.13 se presenta con el asistente GeoGebra.

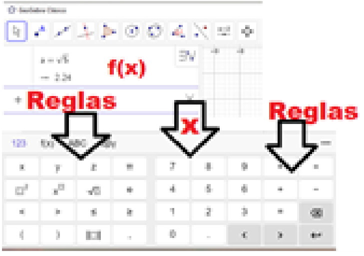


Figura 1.13

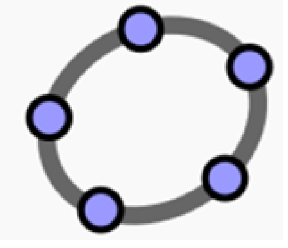


Figura 1.14

Icono de la aplicación GeoGebra

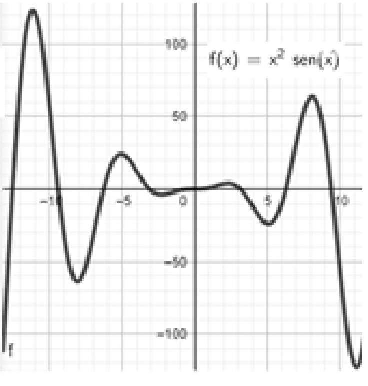


Figura 1.15

Gráfica de una función de una variable con GeoGebra.

Una función se puede representar de cuatro maneras diferentes, pero equivalentes entre sí:

1. Mediante una descripción:

Ejemplo:

Para calcular el área de un círculo se multiplica el número π por el radio del círculo elevado al cuadrado.

2. Mediante una fórmula:

Ejemplo:

$A=\pi r^2$

También expresado como una función de r: $f(r)=\pi r^2$

3. Mediante una tabla numérica.
4. Mediante una gráfica

Para ejemplificar (4) y (5) primero vamos a referirnos brevemente al asistente matemático GeoGebra, porque mediante las posibilidades que ofrece esta aplicación estudiaremos estas y otras funciones.

1.2. GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel de enseñanza.

GeoGebra posibilita en la misma aplicación estudiar geometría, álgebra, análisis matemático y estadística, ofreciendo representaciones diversas de los objetos desde cada una de

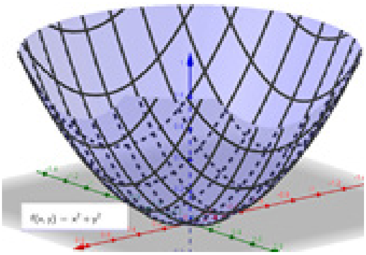


Figura 1.16

Gráfica de una función de dos variables con GeoGebra.

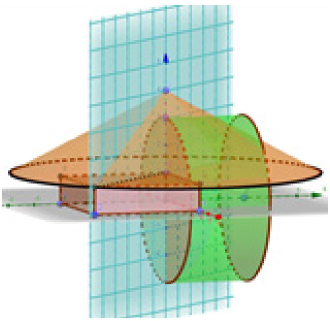


Figura 1.17

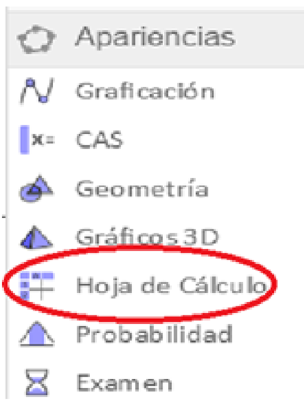


Figura 1.18

Submenú Apariencias del

sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y hojas de datos dinámicamente vinculadas.

El creador de GeoGebra fue Markus Hohenwarter, y lo comenzó en su proyecto de tesis en el año 2001.

Como características de GeoGebra se destacan:

» Es gratuito y de código abierto (GNU GPL).

» Está disponible en español, incluido el manual de ayuda.

» Presenta foros en varios idiomas, el castellano entre ellos.

» Ofrece una wiki en donde compartir las propias realizaciones con los demás.

» Usa la multiplataforma de Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux, Solaris o MacOS X.

Además de la gratuidad y la facilidad de aprendizaje, GeoGebra muestra una doble percepción de los objetos, una en la Vista Gráfica (Geometría) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra), de modo que existe una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas, lo cual es muy favorable para el estudio de las funciones. En la medida que se avance en el estudio de las funciones, se profundizará en el estudio del GeoGebra.

GeoGebra se utiliza para seleccionar la vista donde trabajar.

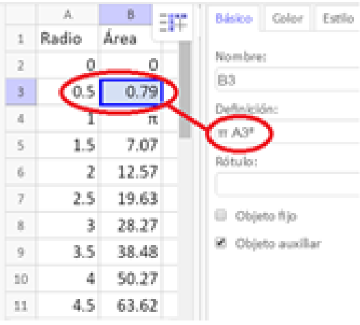


Figura 1.19

Construcción de tablas con GeoGebra.

Observe en la columna B se ha escrito la fórmula

$A=\pi r^2$ pero haciendo referencia a la celda que tiene al lado donde se han almacenado los valores correspondientes a los radios, de ahí la expresión $\pi A3^2$ que aparece en la celda B3.

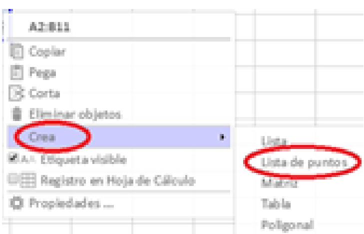


Figura 1.20

1. Seleccione la tabla.

1.3. Representación de funciones mediante tablas y gráficas con GeoGebra

El primer paso para hacer una tabla con GeoGebra es seleccionar la opción ***Hoja de Cálculo*** del submenú ***Apariencias*** Figura 1.18.

En Figura 1.19 se muestra la construcción de una tabla con las áreas de 10 círculos con radios que toman valores entre 0 y 4.5.

Finalmente, la secuencia de las figuras 1.20, 1.21 y 1.22 muestra la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico (SICA) que permiten obtener el gráfico de la función $f(x)=\pi x^2$

Estamos en condiciones de dar una definición de función más formal; para ellos vamos a transformar un poco la definición dada

DEFINICIÓN: Función.

Dado dos conjuntos no nulos A y B, f es una función de A en B si y solo si:

i. Para cada ($\forall$) x elemento ($\in$)de A existe ($\exists$) un y elemento ($\in$) de B tal que $y=f(x)$

ii. Ese valor y es único, es decir, Si (x,y) es elemento de f y ($\wedge$) (x,z) pertenece a f, entonces ($\Rightarrow$) $(y=z)$

Solo con notación matemática lo expresado se escribe: Dado dos conjuntos no nulos A y B, f es una función de A en B si y solo si:

2. Pulse el botón derecho del mouse.

3. Seleccione "Crea".

4. Seleccione "Lista de puntos.

Automáticamente aparece el siguiente gráfico.

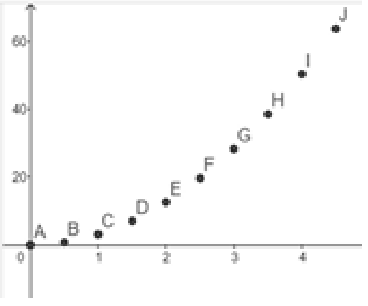


Figura 1.21

Sobre este conjunto de puntos se puede superponer la correspondiente función continua.

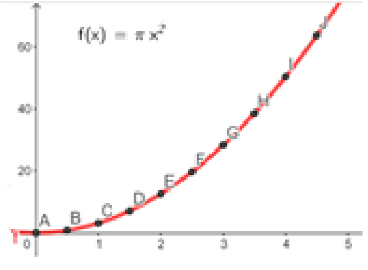


Figura 1.22

Al escribir sobre la vista algebraica del GeoGebra la función: $f(x)=\pi x^2$ se obtiene el gráfico de color rojo.

i. $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B: y=f(x)$

ii. $((x,y)\in f \wedge (x,z)\in f) \Rightarrow (y=z)$

En esta definición se ha hecho mención de pares ordenados; de modo que si se considera una función como un conjunto de pares ordenados; entonces, bajo esta concepción, la función es un caso particular de relación (subconjunto de pares ordenados de un producto cartesiano A×B)y su particularidad radica en que las primeras componentes no se repiten, es decir,

Si $(x,y)\in f \wedge (x,z)\in f) \Rightarrow (y=z)$.

Una definición formal es:

DEFINICIÓN: Función.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R} \subset A \times B \\ es\ una\ función \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in A, \exists y \in B: x\mathcal{R}y \\ (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z) \Longrightarrow (y=z) \end{pmatrix}$$

La función que se ha venido estudiado relacionada con el área de un círculo se puede escribir del siguiente modo:

$A:[0;4,5] \mapsto \mathbb{R}^+ : A(r)=\pi r^2, \forall r \in [0;4,5]$

Se lee A aplica el intervalo [0;4,5] en$\mathbb{R}^+$, tal que A de r es igual a π multiplicado por el cuadrado de r.

De lo anterior se infiere que hay relaciones que son funciones y relaciones que no lo son:

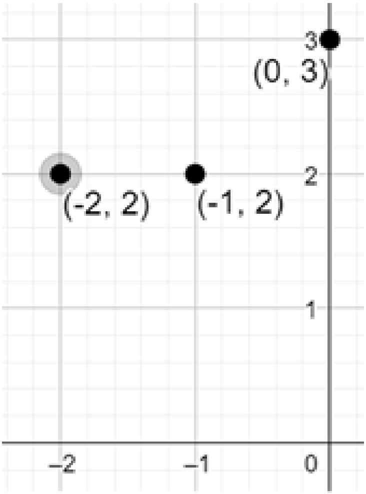


Figura 1.23

Gráfico de R_1. Se trata de una función.

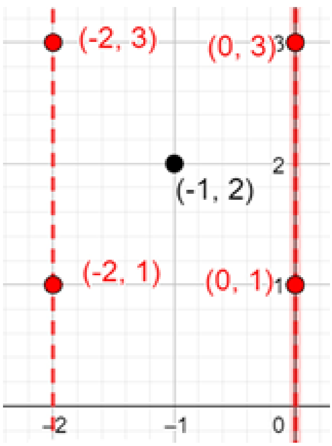


Figura 1.24

Gráfico de R_2 no es una función, observe que hay rectas paralelas al eje de ordenadas que cortan a la función en más de un punto.

Ejemplo:

Sea A={0,-1,-2} y B={1,2,3}

El producto cartesiano viene dado por:

$(A\times B=\{(0;1),(0;2),(0;3),$

$(-1;1),(-1;2),(-1;3),$

$(-2;1),(-2;2),(-2;3)\})$

Sean:

$R_1=\{(x,y)\in A\times B:3 \text{ divide a } (x+y)\ \}$

$R_2=\{(x,y)\in A\times B:(x+y) \text{es impar}\}$

El conjunto de pares que define esta relación es:

$R_1=\{(0;3),(-1;1),(-2;2)\ \}$ Es función.

Ver representación gráfica en Figura 1.23.

$R_2=\{(0;1),(0;3),(-1;2),(-2;1),(-2;3)\}$ No es función, porque 0 es primer componente de dos pares y también lo es -2. Ver representación gráfica en Figura 1.24.

De lo expresado en el pie de la Figura 1.24 se infiere la siguiente prueba:

Prueba de la recta vertical:

Una curva en el plano *xy* es la gráfica de una función *x* si y sólo si ninguna recta vertical se in-terseca con la curva más de una vez.

Observe:

Aunque en este texto se trabajará con funciones numéricas definidas en los números reales ($\mathbb{R}$) y que toman valores en $\mathbb{R}$ o en subconjuntos de $\mathbb{R}$, excepto cuando se especifique otro conjunto de definición ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), existen otras funciones como pueden ser:

La función que asigna:

» A la capital de cada país, la letra inicial de su nombre.

» A cada círculo de un plano, un cuadrado del mismo plano.

» A cada triángulo, la altura relativa a su lado mayor.

» A cada número real, un punto de una recta.

» A los puntos extremos de un segmento, un punto exterior al segmento.

» A cada pecado capital, una nota musical.

» A cada número del intervalo [-5,5], el número 1 si el número perteneciente al referido intervalo racional y -1 si es irracional.

1.4. Dominio e imagen de funciones.

Hecha la aclaración anterior, reiteramos que texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes, definidas en $\mathbb{R}$, salvo que se especifique lo contrario.

Ejemplos:

Ecuaciones en forma implícita	Ecuación en forma explícita
$y - 3x + 5 = 0$	$y = 3x - 5$
$y - x^2 - 3x + 5 = 0$	$y = x^2 + 3x - 5$
$y(3x - 5) - 1 = 0$	$y = \dfrac{1}{3x - 5}$
$y^2 - 3x + 5 = 0$	$y = \sqrt{3x - 5}$
$2^{3x-5} - y = 0$	$y = 2^{3x-5}$
$log_2(3x - 5) - y = 0$	$y = log_2(3x - 5)$
$y - sen(3x - 5) = 0$	$y = sen(3x - 5)$

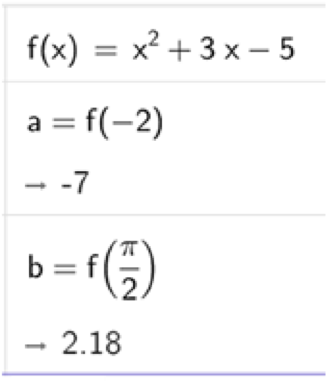


Figura 1.25

Vista algebraica de la aplicación GeoGebra para evaluar una función en un punto.

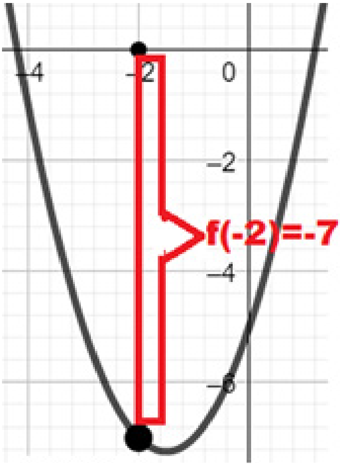


Figura 1.26

f (-2) representa la longitud del segmento orientado que va del punto (-2;0) del eje de abscisa al punto (-2,-7) de la gráfica.

En la tabla se muestran ***ecuaciones en forma implícita*** en las cuales se define "*y*" como variable dependiente de "*x*" y por supuesto, "*x*" como variable independiente. Para evaluar estas funciones, esto es, para encontrar el valor de "*y*" correspondiente a un valor de dado para "*x*", resulta conveniente despejar "*y*" en el lado izquierdo de la ecuación y de esta forma se obtiene la ***ecuación en forma explícita***.

Finalmente, la ***notación funcional*** tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como f(x), informando al mismo tiempo que la variable independiente es "x" y que la función (criterio de correspondencia) se denota por *"f"*. El símbolo f(x) se lee *"f de x"*. La notación de funciones permite ahorrar palabras, así, en lugar de preguntar *"¿cuál valor de y que corresponde a x = 3?"* se puede preguntar *"¿cuánto vale f (3)?"*

Esto también facilita el trabajo con el asistente GeoGebra a la hora de evaluar una función en una expresión determinada como se muestra en las figuras 1.25, 1.26 y 1.27.

Cada vez que en la mayoría de los textos se aborda el concepto de dominio de una función, el mismo se define con expresiones como la siguiente:

"Conjunto de los elementos del conjunto de partida a los cuales se le hace corresponder algún elemento del conjunto de llegada".

Por supuesto que esta definición es

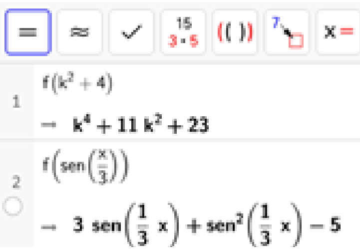


Figura 1.27

Vista de Cálculo Simbólico (CAS)de la aplicación GeoGebra para evaluar una función en una expresión matemática.

correcta, pero cuando la he planteado en mi clase, muchos alumnos se han quedado mirándome como esperando algo más, y en una ocasión un alumno me preguntó:

- "bueno y ¿qué?

- ¿qué me dicen esa sucesión de palabras?"

Ante este planteamiento salí contrariado del aula y al llegar a mi casa bajé para mi mesa de trabajo varios libros de mi biblioteca y comencé una búsqueda, hasta que encontré un libro cuya primera edición se publicó en 1979 y que se titula "Álgebra y funciones elementales" de la editorial MIR en la antigua Unión Soviética, escrito por Kalnin (1988), en él su autor no habla de dominio de la función sino de "región de definición de una función" del siguiente modo:

Se denomina *región de definición* de una función al conjunto de puntos del eje numérico, en los que la función tiene valores reales completamente definidos.

Dos días después regresé al aula, di esta definición y, por supuesto, pregunté al alumno si ahora le decía algo la nueva definición y su respuesta fue:

- ¡Ahora si profe!
- Ahora usted ha hablado en español y letra de imprenta, antes era en árabe y letra cursiva escrita por un médico[1].

Con la anécdota agradezco a este alumno su "bendita irrespetuosidad" gracias a la cual espero que, al hablar hoy para los lectores, lo haga en español y letra de imprenta.

1 El Cuba los médicos tienen fama de escribir sus métodos y recetas con letra ilegible

A partir de esta definición analicemos el dominio o región de definición de las siguientes funciones.

	La función tiene valores reales completamente definidos para:
$f(x) = 3x - 5$	Cualquier valor real de la variable x.
$f_1(x) = x^2 + 3x - 5$	Cualquier valor real de la variable x.
$f_2(x) = \frac{1}{3x - 5}$	Cualquier valor real de la variable x, excepto para aquel en el que $3x - 5 = 0$, es decir, cuando $x = \frac{5}{3}$.
$f_3(x) = \sqrt{3x - 5}$	cualquier valor real de la variable x, excepto para aquellos en los que $3x-5<0$, es decir, cuando $x < \frac{5}{3}$.
$f_4(x) = 2^{3x-5}$	Cualquier valor real de la variable x
$f_5(x) = log_2(3x - 5)$	cualquier valor real de la variable x, excepto para aquel en el que $3x - 5 \leq 0$, es decir, cuando $x \leq \frac{5}{3}$.
$f_6(x) = sen(3x - 5)$	Cualquier valor real de la variable x.

Precisado lo que es dominio de una función, pasemos ahora a cómo se puede describirse y encontramos dos maneras de hacerlo, o bien de manera implícita, en este caso se trata del conjunto que describe todos los números reales para los que está definida la función, mientras que un dominio definido explícitamente es el subconjunto del dominio de la función que en ocasiones se da junto con la función para acotar el dominio.

Ejemplo:

Sea la función $f_3(x) = \sqrt{3x - 5}$ con $2 \leq x \leq 10$ tiene un dominio definido de manera explícita dado por: $\{x \in R: 2 \leq x \leq 10\} \Rightarrow x \in [2,10]$.

Por otra parte, la función definida por $f_3(x) = \sqrt{3x - 5}$ tiene un dominio implícito en el que se expresa las condiciones para que la función tenga valores reales completamente definidos, en este caso debe suceder que $3x-5 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$ es el conjunto $D(f_3\,(x)) = \{x \in R: x \geq \frac{5}{3}\} \Rightarrow x \in [\frac{5}{3}, +\infty\dashv[$.

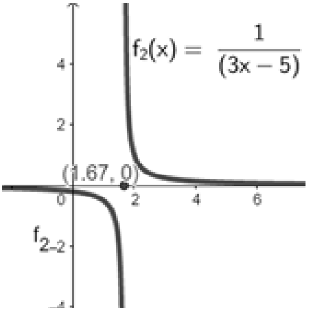


Figura 1.28

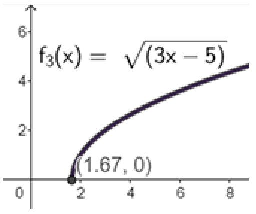


Figura 1.29

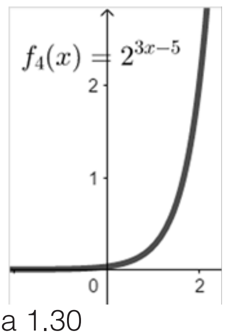


Figura 1.30

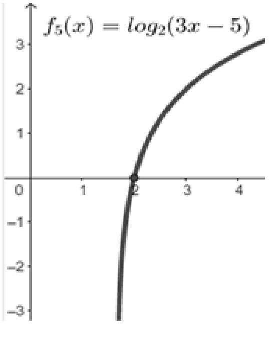


Figura 1.31

El gráfico de la función también permite visualizar el comportamiento del dominio de la función como se muestra en las cuatro figuras 1.28-1.31 que se corresponden con cuatro de las funciones que se han analizado en este apartado del libro.

De igual modo, el gráfico permite identificar la imagen de la función. La cual se define como;

DEFINICIÓN: Imagen de una función

Dada una función $f:A\longrightarrow B$ se nombra imagen de la función, al conjunto de todos los elementos del conjunto B que tengan al menos una preimagen en A.

Simbólicamente esta idea se expresa del siguiente modo:

$$\mathrm{Im}\ f=\{y\in B \mid \exists\ x\in A: f(x)=y\}$$

$$(y\in \mathrm{Im}\ f)\Leftrightarrow(\exists\ x\in A: f(x)=y)$$

Otra forma de determinar la imagen es despejando x en la función y hallar el dominio de la función encontrada.

Ejemplo:

Sea la función definida por

$$f_3(x)=\sqrt{3x-5}\,;\quad \left(f_3(x)\right)^2=\left(\sqrt{3x-5}\right)^2;\quad \left(f_3(x)\right)^2=3x-5$$

$$\left(f_3(x)\right)^2+5=3x\,;\ \ x=\frac{\left(f_3(x)\right)^2+5}{3}$$

Esta última expresión está definida para cualquier valor de f_3 (x) como determinar la inversa de una función no siempre resulta fácil, GeoGebra ofrece el comando Inversa que utilizando la vista de cálculo algebraico es posible obtener tales funciones como se muestra en la composición gráfica que se adjunta.

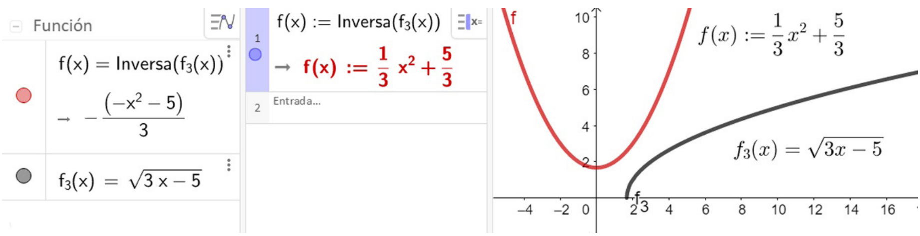


Figura 1.32

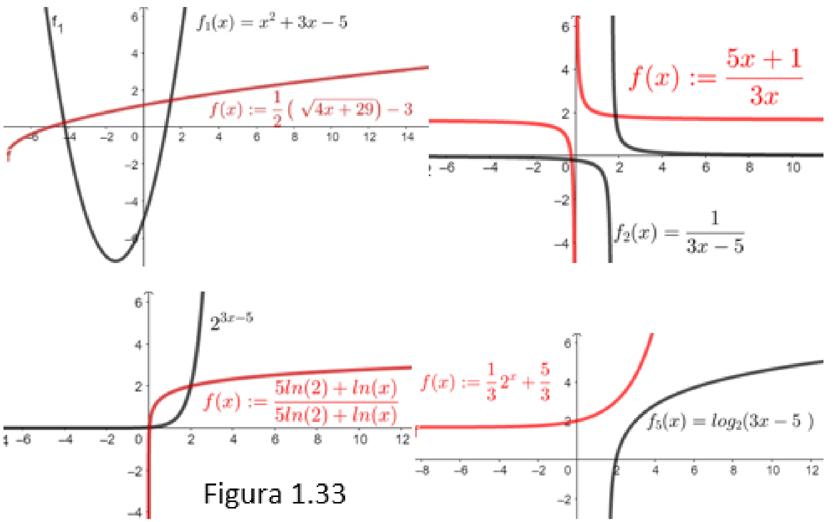


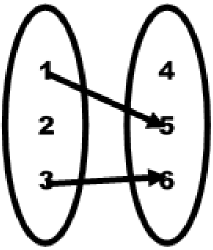
Figura 1.33

En las figuras que se muestran gráficos de las funciones estudiadas y al igual que en el anterior están la función directa y la inversa a fin de ayudar a determinar dominio e imagen de cada función.

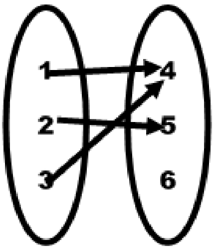
Ejercicios y problemas propuestos

I.1 Diga cuando los diagramas siguientes definen o no una función de

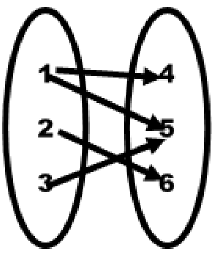
A= {1, 2, 3} en B= {4, 5, 6}



a



b



c

I.2 Definir una fórmula para las siguientes funciones:

a) A cada número real asignarle por f su cuadrado.
b) A cada número natural asignarle por f(n) su sucesor.
c) A cada número real asignarle por f1 la constante π.
d) Hacer corresponder a cada número real por g su cuadrado más 3.
e) Hacer corresponder por g1 a cada número real su valor más el valor absoluto de su valor.
f) A cada número real x, atribuirle por h su cubo.

g) A cada número real positivo asignarle su recíproco, en caso que sea posible.

h) A cada número real asignarle su raíz cuadrada en caso de que sea posible.

I.3 Utilizando GeoGebra u otro asistente matemático represente gráficamente cada una de las funciones definidas en I.2 y diga en cada cuál es su dominio e imagen.

I.4 Las funciones también pueden definirse por ramas, es decir, se asigna un criterio de correspondencia para una parte del dominio y otros a otras partes, un ejemplo puede ser la siguiente función:

Ejemplo:

Mediante la función f se le hace corresponder la constante π a los valores de x menores que cero o igual a cero y x+π a los mayores que cero.

Definidos formalmente la expresión de la función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \pi \; si \; x \leq 0 \\ x + \pi \; si \; x > 0 \end{cases}$$

Para este tipo de funciones GeoGebra tiene la función lógica **Si** cuya sintaxis es Si(<condición>, <Entonces>) y con un mayor nivel de complejidad Si(<condición>, <Entonces>, <Si no>). En Figura 1.34, se muestra la sintaxis, un ejemplo y su efecto gráfico.

Si(<Condición>, <Entonces>)

Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)

$$f(x) = Si(x \leq 0, \pi, x + \pi)$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi & : x \leq 0 \\ x + \pi & : \text{en caso contrario} \end{cases}$$

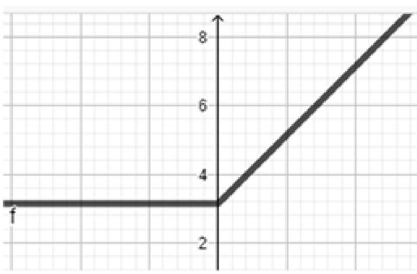


Figura 1.34

En esta función, para la primera rama

$f(x)=\pi$ no existe limitaciones para el dominio, por tanto $Dom(f)=R$ y lo mismo sucede para la segunda rama, $f(x)=x+\pi$, pero de igual modo, para la primera rama la imagen es $Imag(f)=\{\pi\}$, mientras que para la segunda la $Imag(f)=\{y\in R|y>\pi\}$ uniendo las imágenes de ambas ramas se tiene:

$Imag(f)=\{y\in R|y\geq\pi\}$

a) Dada la función

$$g(x)=\begin{cases} x^2\ si\ x\geq -2 \\ x-2\ si\ x<-2 \end{cases}$$

Calcular:

i. g(5)

ii. g(0)

iii. g(-2)

b) la función |x| se define del siguiente modo:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x\ si\ x\geq 0 \\ -x\ si\ x<0 \end{cases}$$

Hallar: |5|, |0|, |-5|

c) Sea

$$k(x)=\begin{cases} x^3\ si\ x\leq 0 \\ 4\ si\ x>0 \end{cases}$$

Calcular: k(3),k(12),k(-15),k(k(-5)),k(a+5),k(k(a+5))

d) La función
$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 5 \; si \; x > 9 \\ x^2 - |x| \; si \; x \in [-9\,,9] \\ x - 4 \; si \; x < -9 \end{cases}$$

Calcular: h(3),h(12),h(-15),h(h(-5)),h(a+5)

e) Utilizando el GeoGebra

f) Halle el gráfico de cada una de las funciones antes definidas.

g) Determine el dominio y la imagen de cada una.

h) Determine ecuación, gráfico, dominio e imagen de:

i) g(x)+k(x)

j) g(x)*k(x)

I.5 A continuación, se muestran los gráficos de diferentes relaciones, cuáles son y cuáles no son funciones.

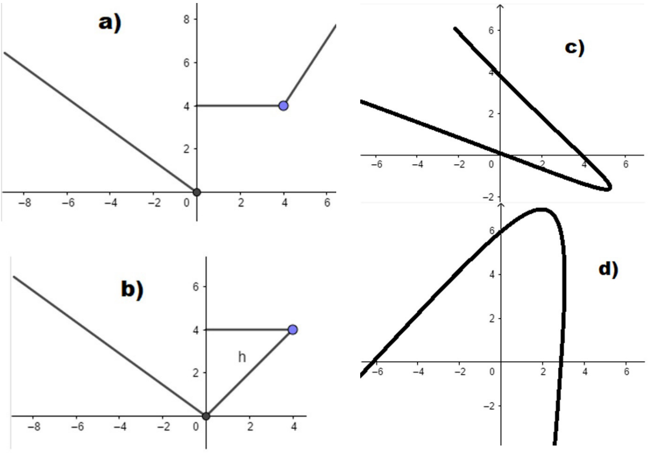


Figura 1.35

I.6 En las siguientes tablas se establecen correspondencias entre las variables “x” y “y”, identifique cuáles son funcione:

a)

x	y
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

c)

x	y
4	$\pm\sqrt{4}$
3	$\pm\sqrt{3}$
2	$\pm\sqrt{2}$
1	$\pm\sqrt{1}$

d)

x	y
-4	4!
-3	3!
-2	2!
-1	1!
0	0!
1	1!
2	2!
3	3!
4	4!

Figura 1.36

CAPÍTULO II.

FUNCIONES Y OPERACIONES ENTRE RELACIONES FUNCIONALES.

"No siempre una operación entre relaciones funcionales da como resultado una relación funcional: la unión de funciones no es en general una función y la intersección de funciones o es vacía o es una función. Los casos de operaciones más interesantes son los de función inversa y composición de funciones".

(García Garrido, 2012).

2.1. Funciones elementales para un nivel de partida

En el capítulo I se definió el concepto de función y de los conceptos fundamentales asociado al mismo como es el caso de Dominio e Imagen, se presentaron sus principales forma de representación: verbal, mediante fórmulas, a través de tablas o empleando un gráfico; como estos fundamentos teóricos necesitaban ejemplificarse, se presentaron distintas funciones, algunas de ellas con un alto nivel de complejidad que no se manifestó en ocasiones por el empleo que se hizo del asistente GeoGebra, pero a partir de este capítulo se hará un estudio cada vez más pormenorizado de cada una.

Siguiendo la idea enunciada comenzaremos por resumir las características de un conjunto de funciones con las que ya el lector se ha familiarizado en ocasiones por presentarlas como ejemplos y en otras porque aparecen en ejercicios, las cuales utilizaremos en este capítulo para exponer y ejemplificar las propiedades y operaciones entre funciones, a estas funciones las llamaremos **"funciones elementales"**, ellas serán como ladrillos para erigir el edificio matemático que intentamos construir:

2.1.1. Función constante:

Una función f de A en B se llama función constante si a cada $x \in A$ se le asigna el mismo elemento $b \in B$, es decir, $f: A \to B$ es una función constante si la imagen de f consta de un solo elemento (Figuras 2.1 y 2.2).

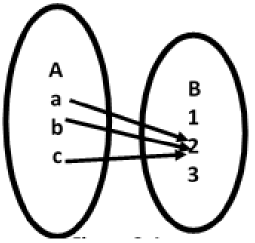


Figura 2.1

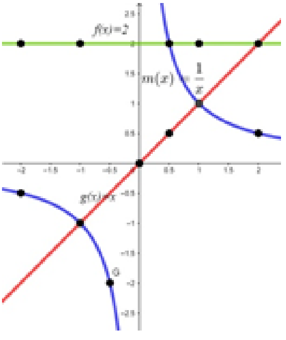


Figura 2.2

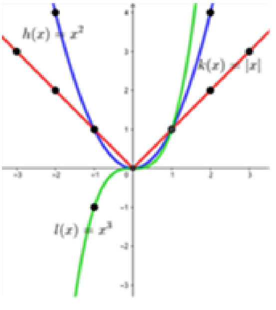


Figura 2.3

Función	Dominio	Imagen
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\{a\}$
$g(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$h(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$k(x) = \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$l(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$m(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	$\mathbb{R}^*$

Figura 2.4

Para las funciones reales la función constante adopta la forma f(x)=a

Ejemplo: La función f(x)=π planteada en el capítulo I.

2.1.2. Función idéntica:

Sea A un conjunto cualquiera, la función f:A→A definida por f(x)=x se llama función idéntica o transformación idéntica sobre A (Figura 2. 2).

Observe que:

a) Mediante esta función a cada elemento de A se le hace corresponder el mismo elemento de A.

b) Su representación gráfica es una línea recta que divide al primer y tercer cuadrante.

c) La recta f(x)=x forma con el eje de abscisas un ángulo de 45°, por eso su pendiente m=tan (45°)=1

d) La recta pasa por el origen de coordenadas (0,0); (0,f(0))

e) f(x)=-f(-x)→x=-(-x).

2.1.3. Función módulo:

Esta función también es conocida como función valor absoluto o función módulo apreció en los ejercicios del capítulo I al tratar las funciones definidas por dos ramas, ya que la función se define por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

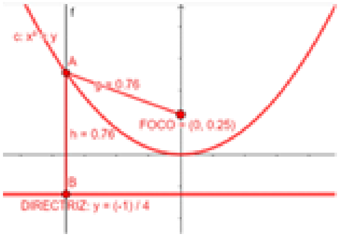


Figura 2.5

Se denomina parábola al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz y de un punto exterior a ella llamado foco.

En la gráfica se muestra la función correspondiente a la función $f(x)=x^2$, en este caso el foco tiene coordenadas $(0,\frac{1}{4})$ y directriz $y=-\frac{1}{4}$.

No existen fundamentos históricos que indique cuándo se iniciaron los estudios de la parábola y las cónicas, pero la tradición atribuye esta paternidad a la cultura griega y la relacionan con el estudio de un problema clásico, la duplicación del cubo.

Su representación gráfica está en Figura 2. 3 y su dominio e imagen al igual de todas las funciones que se tratan en este epígrafe está en Figura 2. 4.

Observe que:

f) Por estar definida la función por dos ramas, su representación gráfica divide al primer y segundo cuadrante por dos semirrectas.

g) La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

h) La función alcanza en el origen de coordenadas (0,0) , (0,f(0)) su valor mínimo.

i) $f(x)=f(-x)\rightarrow|x|=|-x|$, de ahí la simetría del gráfico de la función.

2.1.4. Función cuadrática

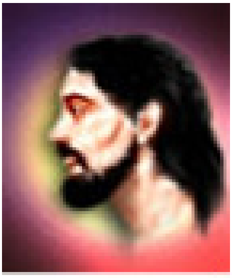
Esta función se presentó en el capítulo I particularmente en el inciso a del ejercicio 1.2 en el que se expresaba “A cada número real asignarle por f su cuadrado”.

El gráfico de $\mathbf{f(x)=x^2}$ está en Figura 2. 3 y su dominio e imagen en la Figura 2.4; un análisis visual de esta función conduce a las siguientes observaciones:

Observe:

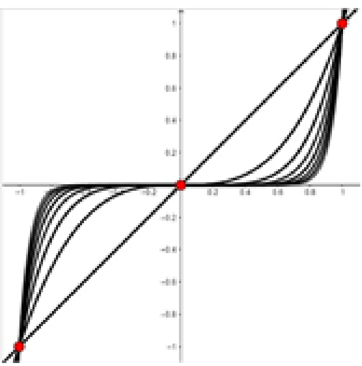
Las propiedades de $f(x)=x^2$ coinciden con las de $f(x)=|x|$

Tienen los mismos conjuntos de dominio e imagen.



Apolonio de Perge

Se tiene seguridad de que el primero en usar el término parábola fue Apolonio de Perge (Perge, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) geómetra griego famoso por su obra Sobre las secciones cónicas. Él fue quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola.



Familia de funciones
$f(x) = x^{2n+1}$

Figura 2.6

La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

La función alcanza en el origen de coordenadas (0,0) , (0,f(0)) su valor mínimo.

$f(x)=f(-x)\rightarrow x^2=(-x)^2$, de ahí la simetría del gráfico de la función.

La gráfica de la función $f(x)=x^2$ es una parábola del tipo $x^2=4py$ (figura 2.5)

2.1.5. Función cúbica

Esta función también se presentó en el capítulo anterior su gráfico está en la Figura 2. 3, las informaciones correspondientes a su dominio e imagen están en Figura 2. 4 y al igual que $f(x)=x^2$ tiene una “hermana gemela” en f(x)=x como se mostrará en el siguiente cuadro de observaciones.

Observe:

Las propiedades de $f(x)=x^3$ coinciden con las de f(x)=x

a)Tienen los mismos conjuntos de dominio e imagen.

b)La gráfica de la función se desarrolla en el primero y tercer cuadrante.

c)La gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas (0,0); (0,f(0))

d)$f(x)=-f(-x)\rightarrow x^3=-(-x)^3$

$\rightarrow$x^3=$-(-x^3)$.

Ambas gráficas pasan además por los puntos (1,1) y (-1,-1) porque

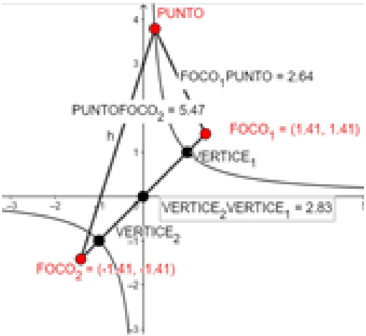


Figura 2.7

Hipérbola equilátera

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva, igual a la distan-cia entre sus vértices.

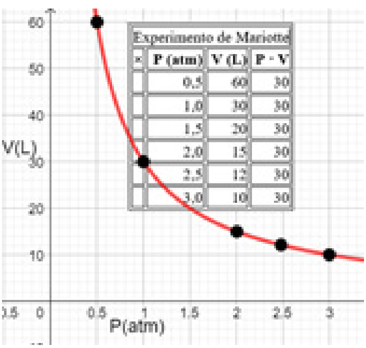


Figura 2.8

Para verificar su teoría, Mariotte introdujo un gas en pertenecen a la familia de funciones $f(x)=x^{2n+1}$ como se muestra en figura 2.6.

2.1.6. Función recíproca

Esta función es conocida como la "función inversa" (Figura 2. 2), está relacionada con la proporcionalidad inversa y su gráfica se corresponde con la de una hipérbola equilátera (Figura 2. 7).

Muchas leyes de física y química se expresan mediante esta función o alguna variante de ella.

Ejemplo:

La ley de Boyle-Mariotte, o ley de Boyle expresa que:

> "La presión ejercida por una fuerza química es inversamente proporcional a la masa gaseosa, siempre y cuando su temperatura se mantenga constan-te (si el volumen aumenta la presión disminuye, y si la presión aumenta el volumen disminuye).

Matemáticamente se expresa por $VP=C \Rightarrow V=\frac{C}{P}$ donde C es una constante.

Observe:

Tanto el dominio como la imagen de la función son $\mathbb{R}^*$, el dominio indica que la variable P no puede tomar el valor 0 por tanto la gráfica no corta el eje de ordenadas, mientras que al ser la imagen distinta de cero el gráfico no un cilindro con un ém-bolo y comprobó las dis-tintas presiones al bajar el émbolo. En la tabla se muestra algunos de los resultados obtenidos y en el gráfico correspondien-te de este este fenómeno, se puede observar que, al aumentar el volumen, la presión disminuye.

Asíntota: Se le llama asínto-ta de la gráfica de una fun-ción a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función; es decir que la distancia entre las dos tiende a ser cero (0), a medida que se ex-tienden indefinidamente.

Asíntotas verticales: Rectas perpendiculares al eje de las abscisas, de ecuación x = constante.

Asíntotas horizontales: Rectas perpendiculares al eje de las ordenadas, de ecuación y = constante

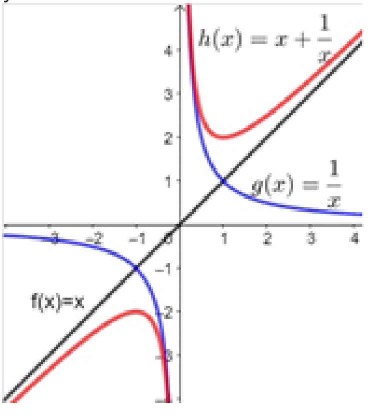


Figura 2.9

corta al eje de abscisas.

Los ejes de coordenadas son asíntotas horizontales y verticales de la curva.

La función es discontinua en x=0.

2.2. Operaciones con funciones

Cada una de las imágenes de las funciones que se estudian son valores numéricos en los que se definen las operaciones aritméticas de suma, resta, producto y cociente, por eso no resulta extraño que dado dos funciones cualquiera sea posible realizarse alguna de estas operaciones y que dé como resultado una función.

2.2.1. Función suma

Dada dos funciones f y g tales que:

$f:\text{Dom } f \rightarrow \text{Im } f: x \rightarrow f(x)$

$g:\text{Dom } g \rightarrow \text{Im } g: x \rightarrow g(x)$

Se llama función suma y se denota f+g a la función definida como:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall\, x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

Ejemplo:

En la Figura 2. 9 aparece la gráfica de la función suma de las funciones f(x)=x "y" g(x)= $\frac{1}{x}$

$(f+g)(x)=x+\frac{1}{x}$; Dom f+g= $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$

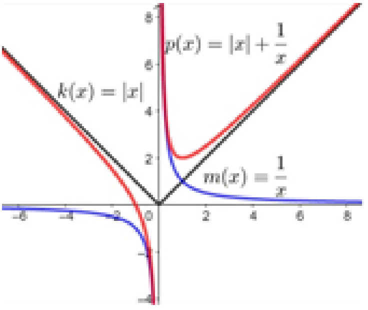


Figura 2.10

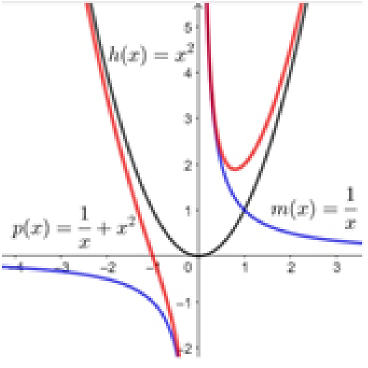


Figura 2.11

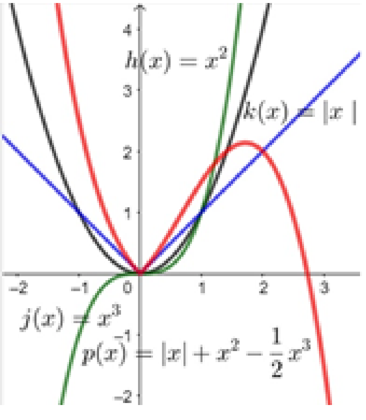


Figura 2.12

Observe:

1. La función f(x)=x se convierte en asíntota oblicua de (f+g)(x)=x+ $\frac{1}{x}$
2. Se mantiene la asíntota vertical y=0 de la función “g(x)=” $\frac{1}{x}$

Dado
$$f(x) = 0 \quad j(x) = x^3$$
$$g(x) = x \quad k(x) = |x|$$
$$h(x) = x^2 \quad m(x) = \frac{1}{x}$$

Se tiene la siguiente tabla de las combinaciones de suma de dos funciones del conjunto dado:

+	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$	$k(x)$	$m(x)$
$f(x)$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$	$k(x)$	$m(x)$
$g(x)$	$g(x)$	$2g(x)$	$x+x^2$	$x+x^3$	$x+\|x\|$	$x+\frac{1}{x}$
$h(x)$	$h(x)$	$x+x^2$	$2h(x)$	x^2+x^3	$x^2+\|x\|$	$x^2+\frac{1}{x}$
$j(x)$	$j(x)$	$x+x^3$	x^2+x^3	$2j(x)$	$x^3+\|x\|$	$x^3+\frac{1}{x}$
$k(x)$	$k(x)$	$x+\|x\|$	$x^2+\|x\|$	$x^3+\|x\|$	$2k(x)$	$\|x\|+\frac{1}{x}$
$m(x)$	$m(x)$	$x+\frac{1}{x}$	$x^2+\frac{1}{x}$	$x^3+\frac{1}{x}$	$\|x\|+\frac{1}{x}$	$2m(x)$

Figura 2.13

Observe que:

1. La función f(x)=0 es el elemento neutro para la función suma (no altera la suma).
2. La suma de funciones es conmutativa

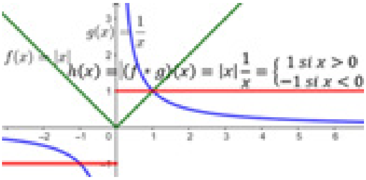


Figura 2.14

Observe que:

$$h(x) = |x|\frac{1}{x} = \begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Es decir, la función h(x) **no está definida en cero (0)**.

Realmente el gráfico de la función "tiene un hueco" en x=0 como se ilustra en el siguiente gráfico; a esta condición h(0) en GeoGebra responde con "indefinido" como se muestra en la gráfica.

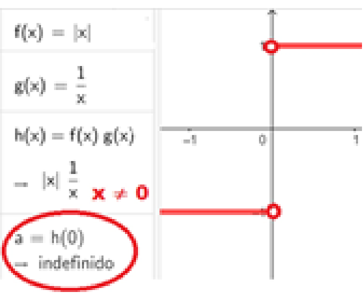


Figura 2.15

Estas propiedades se pueden formalizar del siguiente modo:

1. $f_1(x)+f_2(x)=f_2(x)+f_1(x), \forall x \in Dom\ f_1(x) \cap Dom\ f_2(x)$; Conmutatividad para la adición
2. $(f_0(x)=0 \ \ \forall x \in R) \Rightarrow (f_1(x)+f_0(x)=f_1(x), \forall x \in Dom\ f_0(x))$ Neutro para la adición
3. $(f_1(x)+f_2(x))+f_3(x)=f_1(x)+(f_2(x)+f_3(x)), \forall x \in Dom\ f1(x) \cap Dom\ f_2(x) \cap Dom\ f\_3(x)$; Asociatividad de la adición

2.2.2. Función Producto

Dada dos funciones f y g tales que:

$f:Dom\ f \to Im\ f: x \to f(x)$

$g:Dom\ g \to Im\ g: x \to g(x)$

Se llama función producto y se denota f*g a la función definida como:

$(f*g)(x)=f(x)*g(x) \ \ \forall\ x \in Dom\ f \cap Dom\ g$

Ejemplo:

En la Figura 2. 13 aparece la gráfica de la función producto de las funciones

$f(x) = |x|$ "y" $g(x)=\frac{1}{x}$

$$h(x) = (f * g)(x) = f(x) * g(x) =$$

$$= |x|\frac{1}{x} = \begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

$$Dom\ f * g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$$

$$Im\ f * g = \{-1,1\}$$

Dado $\begin{array}{ll} f(x) = 1 & j(x) = x^3 \\ g(x) = x & k(x) = |x| \\ h(x) = x^2 & m(x) = \frac{1}{x} \end{array}$

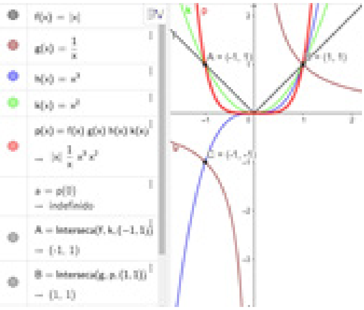


Figura 2.17

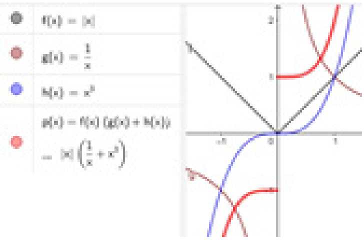


Figura 2.18

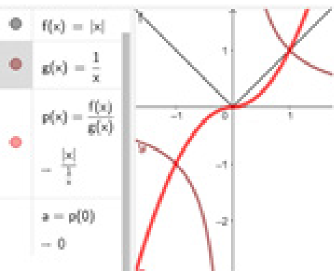


Figura 2.19

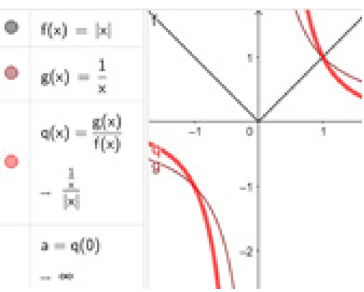


Figura 2.20

Se tiene la siguiente tabla de las combinaciones de producto de dos funciones del conjunto dado:

*	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$	$k(x)$	$m(x)$
$f(x)$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$	$k(x)$	$m(x)$
$g(x)$	$g(x)$	$(g(x))^2$	$x*x^2=x^3$	$x*x^3=x^4$	$x*\|x\|$	$x*\frac{1}{x}$
$h(x)$	$h(x)$	$x*x^2=x^3$	$(h(x))^2$	$x^2*x^3=x^5$	$x^2*\|x\|$	$x^2*\frac{1}{x}$
$j(x)$	$j(x)$	$x*x^3=x^4$	$x^2*x^3=x^5$	$(j(x))^2$	$x^3*\|x\|$	$x^3*\frac{1}{x}$
$k(x)$	$k(x)$	$x*\|x\|$	$x^2*\|x\|$	$x^3*\|x\|$	$(k(x))^2$	$\|x\|*\frac{1}{x}$
$m(x)$	$m(x)$	$x*\frac{1}{x}$	$x^2*\frac{1}{x}$	$x^3*\frac{1}{x}$	$\|x\|*\frac{1}{x}$	$(m(x))^2$

Figura 2.16

Observe:

1. La función f(x)=1 es el elemento neutro para la función producto.
2. El producto de funciones es conmutativo

Estas propiedades se pueden formalizar del siguiente modo:

1. $f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$, $\forall x\in \text{Dom } f_1(x)\cap \text{Dom } f_2(x)$; Conmutatividad para la multiplicación
2. $(f_0(x)=1 \quad \forall x\in R)\Rightarrow(f_1(x)*f_0(x)=f_1(x), \forall x\in \text{Dom } f_0(x))$ Neutro para la multiplicación
3. $(f_1(x)*f_2(x))*f_3(x)=(f_1(x)*(f_2(x)*f_3(x)), \forall x\in \text{Dom } f_1(x)\cap \text{Dom } f_2(x)\cap \text{Dom } f_3(x)$; Asociatividad de la multiplicación

Como se ha limitado el estudio de las funciones a la variable real, en realidad las operaciones definidas cumplen las leyes de las operaciones con números reales, por eso falta precisar la forma que adopta la distributividad del producto de funciones respecto a la

Observe la diferencia de los gráficos de las figuras 2.19 y 2.20 y los resultado de evaluar en cero ambas funciones; así, mientras p(0)=0 lo cual indica que la función está definida en cero (0), *q(0)=∞* indicando que la función no está definida en ese punto.

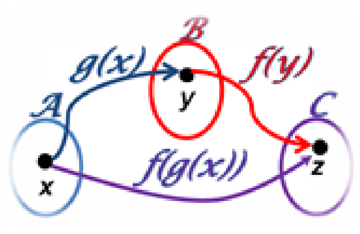


Figura 2.21

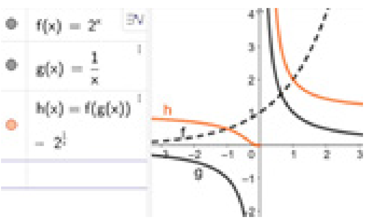


Figura 2.22

Observe que el dominio de f es la imagen de g, de ahí que dado $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces, $h(x) = f\left(g(x)\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

suma de funciones.

4. $f_1(x) * (f_2(x) + f_3(x)) = f_1(x) * f_2(x) + f_1(x) * f_3(x), \forall x \in Dom\, f_1(x) \cap Dom\, f_2(x) \cap Dom\, f_3(x)$

Ejemplo:

En la Figura 2. 18 aparece la gráfica de la función producto de la función f(x)=|x| por la suma de las funciones "g(x)= $\frac{1}{x}$ "y" h(x)= x^3

Finalmente, el cociente de dos funciones se define por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ \forall\, x \in\ Dom\, f \cap Dom\, g: g(x) \neq 0$$

Ejemplos:

a) En la Figura 2. 19 aparece el cociente de las funciones

$$p(x) = \frac{f(x)=|x|}{g(x)=\frac{1}{x}}$$

b) En la Figura 2. 20 aparece el cociente de las funciones

$$q(x) = \frac{g(x)=\frac{1}{x}}{f(x)=|x|}$$

2.2.3. Función compuesta

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta f ∘ g (también conocida como composición de f y g) está definido por:(f ∘ g)(x)=f(g(x)). En la Figura 2. 21 se ilustra la composición de dos funciones.

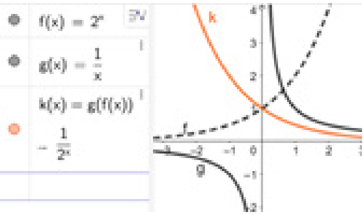


Figura 2.23

Análogo a la composición de funciones anteriores se tiene: $k(x) = g\left(f(x)\right) = \frac{1}{2^x}$

Se constata que, en general, $f\left(g(x)\right) \neq g\left(f(x)\right)$

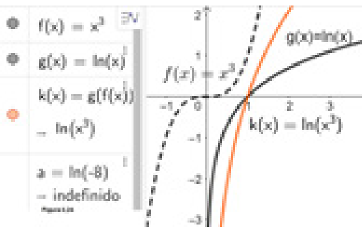


Figura 2.24

Observe:

El dominio de la función f, coincide con la imagen de la función ***g***, por lo tanto, la expresión ***f(g(x))*** está definida y entonces, si a cada $x \in \mathbb{R}$, se le hace corresponder el número real g(f(x)) esta relación es una función. A esta nueva función se le llama función compuesta de f y g, se denota por g • f y se define como (g • f) (x) = g(f(x}).

La composición de funciones es, sin lugar a duda, la operación más importante que puede realizarse entre estos entes matemáticos y por su importancia cabe la siguiente pregunta: ¿Qué condiciones deben cumplir las funciones f y g para que exista la función compuesta?

Como en la función (f o g) (x), f halla la imagen a la imagen de g, entonces es preciso que estas últimas estén en el dominio de f (Figura 2. 22 y 2.23).

Por lo tanto. para que exista la función g • f es necesario y suficiente que la imagen de f esté incluida en el dominio de g. Caso contrario, es posible definir la función g o f restringiendo el dominio de f a aquellos valores que sus imágenes pertenezcan al dominio de g (Figura 2. 24). Observe en la figura que la imagen de $f(x)=x^3$ es $\mathbb{R}$ pero por ser $g(f(x))=\ln(x^3)$, su dominio es $\mathbb{R}_+^*$ es decir, se ha restringido el dominio.

Los ejemplos y problemas que se plantearán se harán a partir de las siguientes funciones

$$f(x) = 1 \qquad j(x) = x^3$$
$$g(x) = x \qquad k(x) = |x|$$
$$h(x) = x^2 \qquad m(x) = \frac{1}{x}$$

Ejercicios o problemas resueltos

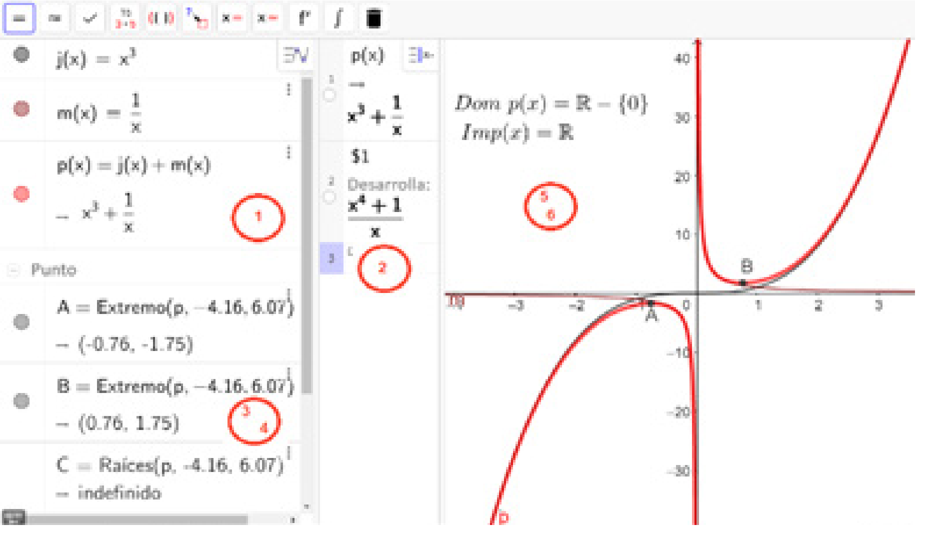
Utilizando el GeoGebra:

1. Construir la siguiente función:

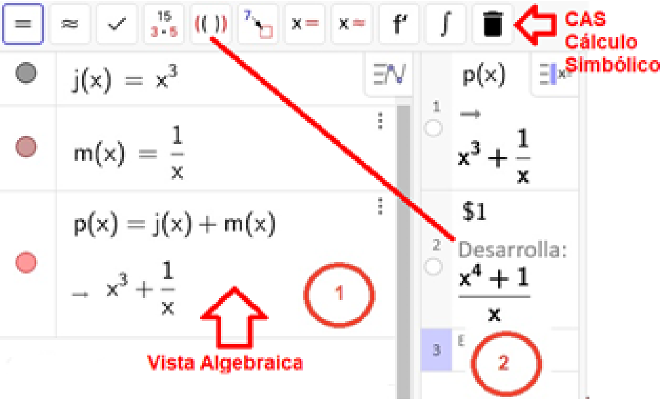
   p(x)=j(x)+m(x)

2. Determine la expresión explícita de p(x).
3. Determine raíces si existen
4. Determine los valores extremos si existen.
5. Graficar la función.
6. Determine dominio e imagen de la función

En el gráfico adjunto se muestra el resultado final que se analizará por partes:



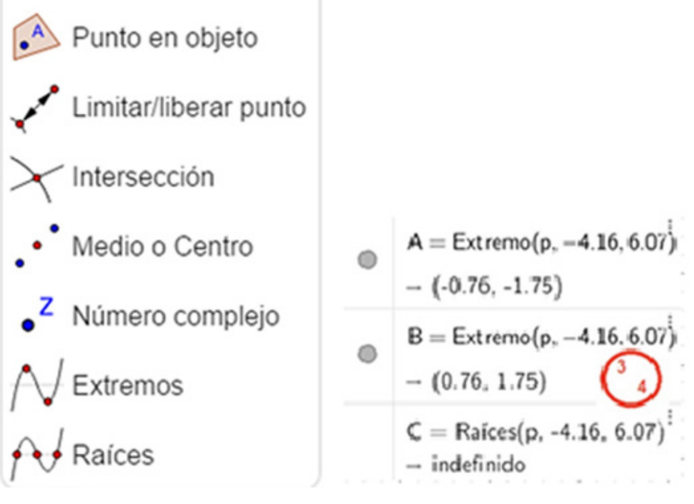
En la siguiente imagen se amplía las respuestas a los incisos 1 y 2:



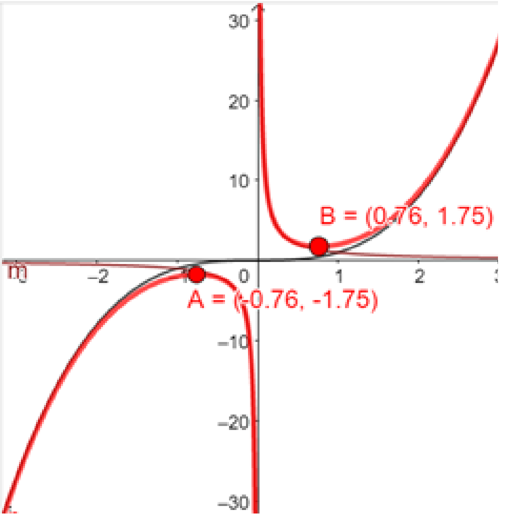
La expresión $\frac{x^4+1}{x}$ dada en la vista CAS adelanta la determinación del dominio de la función:

1. $x \neq 0$
2. El numerador x^4+1 no admite ceros reales.

Los incisos 3 y 4 se responden en la siguiente combinación gráfica:



En la opción de menú “A” aparecen las correspondientes a “Extremos” y “Raíces” y al accionarlas y seleccionar la función a analizar aparecen las coordenadas de los valores extremos (máximo y mínimo) así como las raíces en caso de que existan; en este caso, como ya se analizó, la función p(x) no tiene ceros reales, por lo que el sistema responde con “indefinido”. Finalmente, el gráfico que se va construyendo en la medida que se realizan los cálculos muestra la función definida.



Si observa las escalas del gráfico vera que, mientras el eje de abscisas tiene las unidades numeradas en orden 1,2, 3…, en el eje de las ordenadas se numeran de 10 en 10, esto se logra mediante la opción de formato de la vista gráfica que se muestra a continuación:

Para determinar el dominio y la imagen de la función es posible hacerlo con la información recogida:

Dom $p(x)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Im $p(x)= \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Ejercicios y problemas propuestos

Tomando como patrón el ejercicio antes resuelto desarrolle para las funciones:

3. $p_1 (x)=p(x)*m(x)$
4. $p_2 (x)=p(x)/(h(x))$
5. $p_3 (x)=(k \circ p)(x)$
6. $p_4 (x)=j(k(x)-3)$
7. $p_5 (x)=p\_3 (x)+p\_4 (x)$

las siguientes acciones:

- Construir la función indicada.
- Determinar su expresión explícita.
- Determinar sus raíces si existen
- Determinar los valores extremos si existen.
- Graficar la función.
- Determinar dominio e imagen de la función

Condiciones de las funciones a estudiar:

CAPÍTULO III.

LAS FUNCIONES Y SUS PROPIEDADES GLOBALES

"Generalmente toda investigación matemática trata de relaciones, correspondencias y funciones".

(Steinhöfel, 1982)

3.1. Propiedades de las funciones

En el capítulo II se expresó que: "Las propiedades de $f(x)=x^2$ coinciden con las de $f(x)=|x|$"; pero estas diferencias y similitudes deben establecerse sobre la base de propiedades globales de las funciones como son:

» **Dominio e imagen de una función**. Estos conceptos fueron definidos en el capítulo I, se ahora aplicarán a la definición nuevos conceptos y al estudio de otras funciones como las definidas por ramas y funciones de dos variables.

» **Los extremos de una función (máximo y mínimo)**. En capítulo II se planteó *"Determine los valores extremos si existen"* y para ello se utilizó la opción "*extremos*" del GeoGebra, en este capítulo se formalizará este concepto.

» **Ceros, signos y puntos fijos de una función**. En el referido ejercicio también se planteó "*Determine raíces si existen*" y se utilizó la opción "*Raíces*" del GeoGebra; ahora se formalizará el concepto y se aplicará al estudio de funciones.

» **Simetría y paridad de una función**: Este concepto se relaciona con dos observaciones del capítulo II, en la función cuadrática: "$f(x)=f(-x)\rightarrow x^2=(-x)^2$" y al tratar la parábola cúbica, se notó: "$f(x)=-f(-x)\rightarrow x^3=-(-x)^3$", la primera corresponde a una función par y la segunda a una impar.

- **Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función**. Son conceptos fundamentales del Análisis Matemático que se introducirán en este capítulo.
- **Monotonía de una función (crecimiento o decrecimiento).** Es otro concepto fundamental del Análisis Matemático que se introducirán en este capítulo.
- **Continuidad de una función**. Este es un concepto propio del Análisis Matemático al tratar los límites de funciones, pero aquí se introducirá en una forma intuitiva, ejemplificada y elemental para presentar un primer acercamiento al tema.
- **Periodicidad de una función**. El tema se tratará en forma general para completar en este capítulo las propiedades de las funciones, pero se retomará al tratar las funciones trigonométricas.
- **Traslación, contracción y dilatación del gráfico de una función.** Ya se han trasladado, contraído y dilatado gráficos de funciones al tratar la suma, producto y composición de funciones, ahora se tratará detalladamente.

3.2. Dominio e imagen de una función

En el capítulo I al definir Dominio de una función se hizo mención del concepto de "*región de definición de una función*" dada por Kalnin (1988), quien expresa que "*se denomina región de definición de una función al conjunto de puntos del eje numérico, en los que la función tiene valores reales completamente definidos*".

Siguiendo este criterio, en el momento de determinar los valores numéricos que hacen que la función tome valores reales completamente definidos se debe tener en cuenta las leyes de la matemática que condicionan que los valores reales estén completamente definidos. Las condicionantes más significativas son:

- Para una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ $\{q(x) \neq 0\}$. (Condición entre llaves.)
- Para funciones con radicales de orden par se tiene: $\sqrt[2n]{f(x)}; \{f(x) \geq 0\}$ Para la función logarítmica $\log_a(f(x)); \{f(x) > 0\}$
- Combinaciones de estas condicionantes.

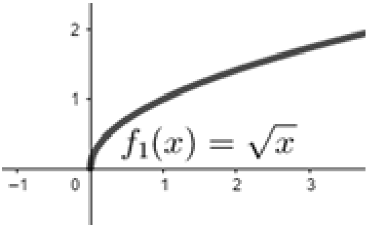


Figura 3.1

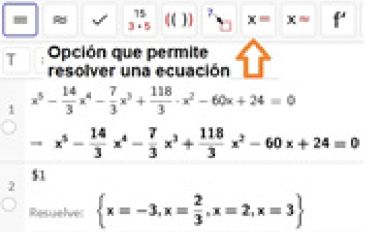


Figura 3.2

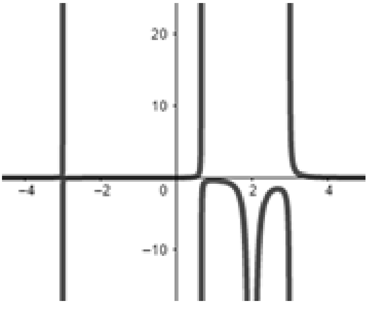


Figura 3.3

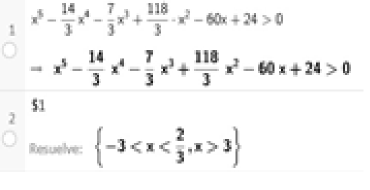


Figura 3.4

Ejemplo 3.1:

Determine el dominio de las siguientes funciones.

a) $f_1(x) = \sqrt{x}$

b) $f_2(x) = \dfrac{x}{x^5 - \frac{14}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{118}{3}x^2 - 60x + 24}$

c) $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^5 - \frac{14}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{118}{3}x^2 - 60x + 24}}$

d) $f_4(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 5x + 3}\right)$

Para (a) basta tomar los valores que hacen a $x \geq 0$ para evitar que bajo un radical de orden par aparezca un número negativo.

$$Dom\ f_1(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Por su parte para la imagen, de la Figura 3. 1 se puede inferir que también la imagen cumple la condición de que

$$Im\ f_1(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

En forma analítica, despejando x en $y=\sqrt{x}$ se tiene: $x=y^2$

Para (b) se tiene que:

$$\boldsymbol{Dom\ f_2(x) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^5 - \frac{14}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{118}{3}x^2 - 60x + 24 \neq 0\right\}}$$

Hay que resolver $\boldsymbol{x^5 - \frac{14}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{118}{3}x^2 - 60x + 24 = 0}$,

tarea que evidentemente no resulta fácil, pero con el GeoGebra y la opción CAS es posible encontrar tal resultado como

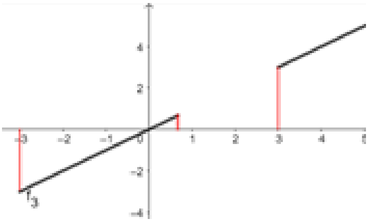


Figura 3.5

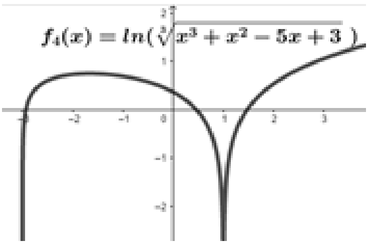


Figura 3.6

Se destaca en el gráfico:

1. La función está definida en un subconjunto de los números reales (-3,+∞).
2. De ese subconjunto se excluye un valor {1}.

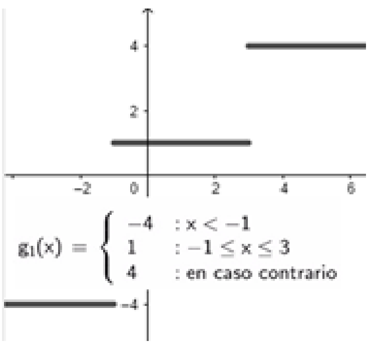


Figura 3.7

se muestra en Figura 3. 2, de ahí la respuesta:

$$\boldsymbol{Dom\ f_2(x) = \mathbb{R} \setminus \{x = -3, x = \frac{2}{3}, x = 2, x = 3\}}$$

En la Figura 3. 3 se muestra el gráfico de la función, observe que en los ceros del denominador existen puntos de discontinuidad, es decir, se produce "un salto" en el gráfico.

Para (c) hay que resolver la inecuación

$$\boldsymbol{x^5 - \frac{14}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{118}{3}\ x^2 - 60x + 24 > 0}$$

se utiliza el mismo proceder como se muestra en Figura 3. 4, dando por respuesta

El gráfico de f_3 (x) se muestra en Figura 3. 5. Las líneas en rojo indican los puntos de discontinuidad calculados al resolver la inecuación anterior, observe la correspondencia del gráfico con el dominio de la función y los "saltos" en el gráfico.

En (d) para determinar el dominio de la función hay que resolver la inecuación $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 5x + 3} > 0$ con la opción CAS de GeoGebra se obtiene la solución

{-3<x<1,x>1}

$$Dom\ f_4(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-3,1) \cup (1, +\infty)\}$$

(Figura 3. 6)

Observe que

$g_1(-1)=g_1(3)=1$

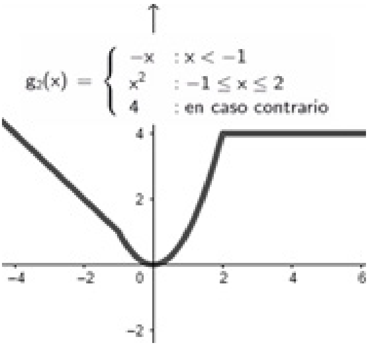


Figura 3.8

Observe que, aunque esta función está definida a trozos, no se producen "saltos" en el gráfico de la función.

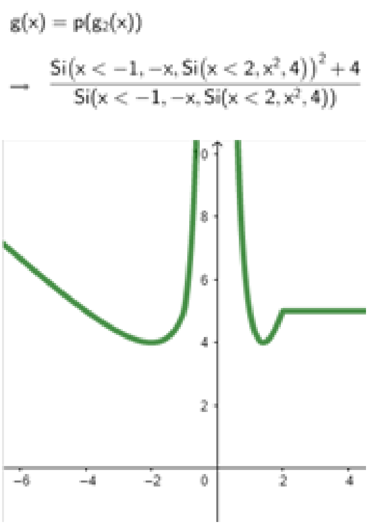


Figura 3.9

Otro interesante análisis del dominio y la imagen de una función se da en al análisis de funciones definidas por ramas o a trozos, son funciones en las que la ley de correspondencia varía de un intervalo a otro,

Ejemplo 3.2:

Sea las funciones definidas por las siguientes leyes de correspondencia:

$$g_1(x)=\begin{cases} -4\ si\ x<-1 \\ 1\ si-1\leq x\leq 3 \\ 4\ si\ x>3 \end{cases}$$

$$g_2(x)=\begin{cases} -x\ si\ x<-1 \\ x^2\ si-1\leq x<2 \\ 4\ si\ x\geq 2 \end{cases}$$

Para definir estas funciones GeoGebra tiene el comando Si con la siguiente sintaxis:

Si(<Condición>,<Entonces>,<Si no>)

g_1 (x)=Si(x<-1,-4,Si(x≤3,1,4))

$$Dom\ g_1(x)=\mathbb{R}\ ;\ Img_1(x)=\{-4,1,4\}$$

(Figura 3. 7)

g_2 (x)=Si(x<-1,-x,Si(x<2,x^2,4))

$$Dom\ g_2(x)=\mathbb{R}\ ;\ Img_2(x)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$$

Las funciones definidas a trozos también admiten las operaciones entre funciones definidas en el capítulo II,

Ejemplo 3.3:

En capítulo II se definió la función

$$f(x) = g_2(p(x))$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\left(\frac{x^2+4}{x}\right) & : \frac{x^2+4}{x} < -1 \\ \left(\frac{x^2+4}{x}\right)^2 & : \frac{x^2+4}{x} \geq -1 \wedge \frac{x^2+4}{x} < 2 \\ 4 & : \text{en caso contrario} \end{cases}$$

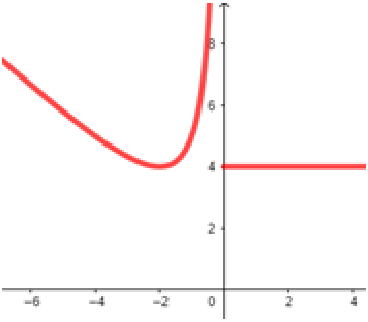
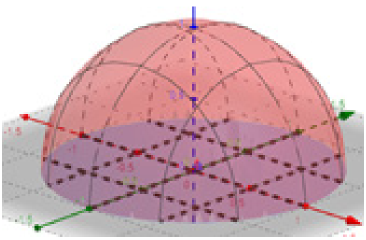


Figura 3.10



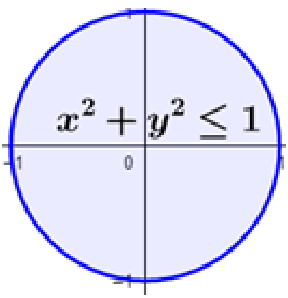


Figura 3.11

$$p(x) = j(x) + m(x) = \frac{x^4+1}{x}$$

La composición de funciones $(p \circ g_2)(x)$ y $(g_2 \circ p)(x)$ se muestra en figuras 3.9 y 3.19.

Determinar dominio e imagen de estas nuevas funciones ha de basarse en la teoría en la que se sustenta estas operaciones, para el caso de la suma y producto el dominio de la nueva función viene dado por la intersección de los dominios de las funciones que constituyen factores de la operación, en tanto que para la composición se debe tener en cuenta que en una composición como $(p \circ g_2)(x)$, el dominio de p(x) es la imagen de $(p \circ g_2)(x)$; en este sentido el gráfico de la función apoya la determinación del dominio y la imagen, además de analizar la relación entre el comportamiento de la nueva función y las funciones originales.

Otros dominios e imágenes importantes son los de las funciones de dos variables que del tipo:

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}\,; A \subseteq \mathbb{R}^2;\ (x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Ejemplo 3.4:

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

La pregunta es ahora ¿quién es A?, es decir ¿cuál es el dominio de esta nueva función?

En este caso se transfiere a este nuevo contexto lo que se conoce de las

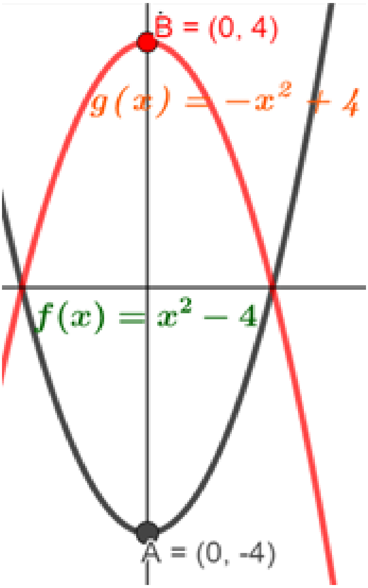


Figura 3.12

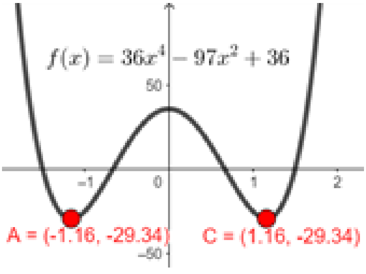


Figura 3.13

En la figura se muestran m(A)=-1.16 y m(C)= 1.16, dos puntos distintos donde la curva alcanza el valor mínimo y como se explica en la nota el valor mínimo es único, en este caso

f (-1.16) =f (1.16) =-29.34

funciones univariadas y es que por estar la función definida por una raíz cuadrada debe cumplirse que $1-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$

En Figura 3. 11 se muestra el gráfico de la función estudiada, una semiesfera que tiene por dominio la región del plano representada por un círculo de radio unidad, donde la condición ≤1 incluye la curva $x^2+y^2=1$ y su interior; a cada uno de estos puntos le corresponde un punto de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

3.3. Extremos globales de una función

El estudio de los valores extremos de una función ha correspondido tradicionalmente a cursos de Análisis Matemático o de Cálculo Diferencial pero hoy los asistentes matemáticos nos lo acercan al facilitar el cálculo algorítmico, al tiempo que posibilita su aplicación en la determinación de la imagen de las funciones como se expondrá en este acápite.

Una aproximación a la de definición de máximo (mínimo) absoluto es la siguiente:

Definición

Si f es una función con dominio D **y** existen puntos **M** o (**m**) tal que $f(x) \leq f(M)$ o $(f(x) \geq f(m)$ **entonces** f **tiene un máximo en "M" o un mínimo en "m"** para toda x perteneciente a D.

Para comprender el significado del subrayado y las negritas en la definición obsérvese la Figura 3. 12, en ella se muestra un mínimo en A y un máximo en

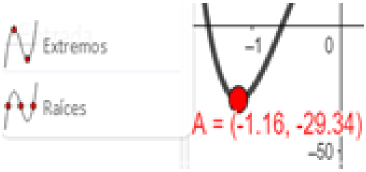


Figura 3.14

En la figura se muestra el comando "Extremos" que brinda el GeoGebra para obtener estos puntos.

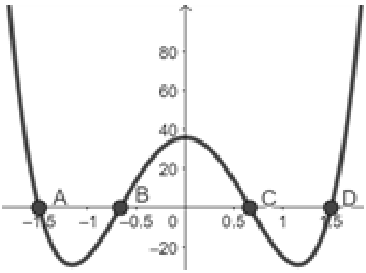


Figura 3.15

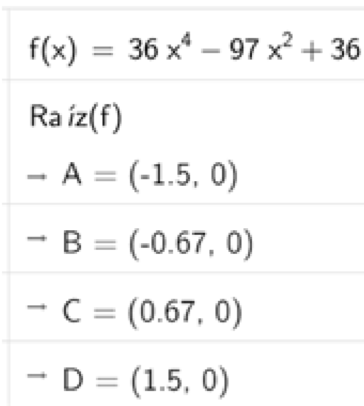


Figura 3.16

B, a partir de ellos es posible determinar las imágenes:

$$Para\ f(x) = x^2 - 4; Imf(x) = \{f(x) \in \mathbb{R} |\ f(x) \geq -4\}$$

$$Para\ f(x) = -x^2 + 4; Imf(x) = \{f(x) \in \mathbb{R} |\ f(x) \leq 4\}$$

Para una mayor precisión se agrega a la definición las siguientes notas:

1. M o (m) es el punto donde se alcanza el Máximo o el mínimo, el cual no necesariamente es único.
2. En f(M) o f(m) se alcanza el valor máximo o mínimo y este si es único.

Para aclarar estas dos notas analice los gráficos y comentarios de las figuras 3.13 y 3. 14

3.4. Ceros, signo y puntos fijos de una función

Definición

Se denomina ceros de una función (si existen) los valores del dominio que anulan la función. En notación matemática, este enunciado se expresa:

$$(x_0 \text{ es cero de f}) \Leftrightarrow (x_0 \in \text{Dom f} \wedge f(x_0)=0).$$

Para la determinación de los ceros de una función se debe seguir el siguiente **algoritmo**:

1. Calcular los ceros de la ecuación f(x)=0
2. Determinar la intersección del conjunto solución calculado en (1) y el dominio de la función.

Para calcular los ceros de una

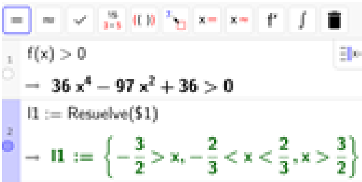


Figura 3.17

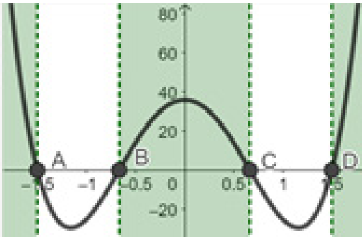


Figura 3.18

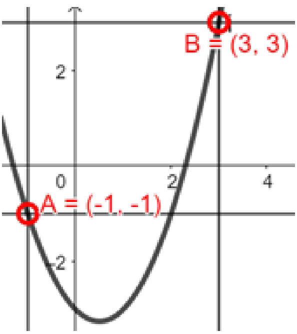


Figura 3.19

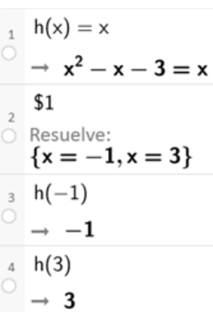


Figura 3.20

función GeoGebra posee el comando “Raíz(<función>)” como se muestran en las figuras 3.15 y 3.16. Se ha utilizado la misma función tratada en la Figura 3. 12 para mostrar las posibilidades que ofrece GeoGebra para de calcular integralmente los valores significativos de una función.

Definición

Determinar el signo de una función es encontrar en cuáles puntos del dominio de la función su imagen es positiva o negativa.

En consecuencia, el **algoritmo** a seguir debe ser:

1. Determinar el conjunto solución de la inecuación f(x)>0 ó f(x)<0.
2. Determinar la intersección del conjunto solución calculado en (1) y el dominio de la función.

GeoGebra posibilita resolver las inecuaciones con el comando “Resuelve” de la vista CAS, Figura 3. 17 y a partir de esta vista es posible obtener el gráfico de la Figura 3. 18.

Definición

$$(x_0 \text{ es punto fijo de } f) \Leftrightarrow (x_0 \in \mathrm{Dom}\, f \wedge f(x_0) = x_0)$$

Lo expresado significa que un punto fijo de una función es aquel cuyo valor de la imagen $f(x_0)$ es igual a x_0. Aunque esto no ocurre en todas las funciones, el conocer su existencia o no es importante para resolver determinados problemas en ecuaciones funcionales.

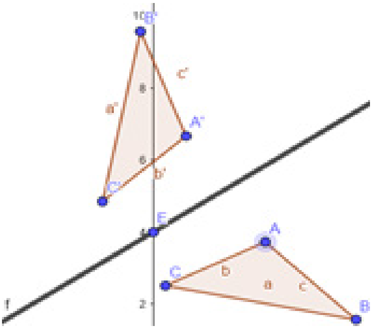


Figura 3.21

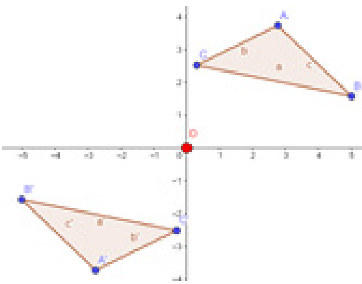


Figura 3.22

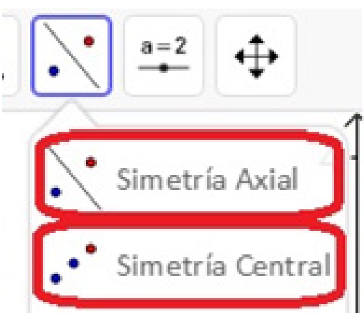


Figura 3.23

Para determinar los puntos fijos de una función se debe seguir el siguiente **algoritmo**:

1. Calcular los ceros de la ecuación f(x)=x
2. Determinar la intersección del conjunto solución calculado en (1) y el dominio de la función.
3. Verificar cuáles son los valores x_0 calculados en (1) que cumplen la condición $f(x_0)=x_0$

En figuras 3. 19 y 3. 20 se muestra el cálculo con GeoGebra de los puntos fijos de $f(x)=x^2-x-3$.

3.5. Simetría y paridad de una función

Simetría (del griego **σύν** “con” y **μέτρον** “medida”) es un rasgo característico de formas geométricas, funciones, sistemas, ecuaciones y otros objetos materiales, o entidades abstractas, relacionada con su invariancia bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios. En geometría plana las simetrías de mayor interés son:

Simetría axial es la simetría alrededor de un eje. Figura 3. 21. La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría.

Simetría central: es la simetría respecto de un punto. En ella, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también (Figura 3. 22).

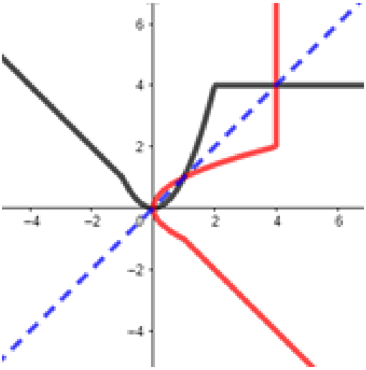
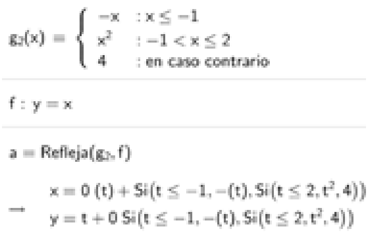


Figura 3.24



$g_2(x) = \begin{cases} -x & : x \leq -1 \\ x^2 & : -1 < x \leq 2 \\ 4 & : \text{en caso contrario} \end{cases}$

$f : y = x$

$a = \text{Refleja}(g_2, f)$

$\rightarrow \begin{array}{l} x = 0\,(t) + \text{Si}(t \leq -1, -(t), \text{Si}(t \leq 2, t^2, 4)) \\ y = t + 0\,\text{Si}(t \leq -1, -(t), \text{Si}(t \leq 2, t^2, 4)) \end{array}$

Figura 3.25

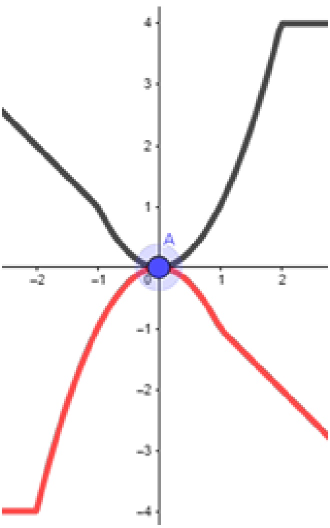


Figura 3.26

En Figura 3. 23 se muestran las "herramientas" que posee GeoGebra para la simetría, particularmente la simetría axial y central.

Utilizando estas posibilidades se ha determinado una simetría axial (Figura 3. 24) de la función definida a trozos en Figura 3. 8, en este caso se utiliza como eje de simetría la función f:y=x, observe el "efecto espejo" de esta recta, por esta similitud es que el comando GeoGebra utilizado es "Refleja(g_2, f)", pero GeoGebra va más allá del gráfico y en la Figura 3. 25 se muestra la ecuación de la función simétrica generada automáticamente en la vista algebraica.

En forma análoga a la simetría axial se tiene la simetría central de la misma función (Figura 3. 26), pero esta vez tomando el origen de coordenada como centro de simetría, al igual que la axial el comando sigue siendo "Refleja" pero esta vez el segundo parámetro es el punto A ("Refleja (g2, A)") y también se genera la ecuación de la función imagen

f(x)=Refleja (g2,A)

→Si(-(x)≤-1,-(-(x)),

Si(-(x)≤2,(-(x))^2,4))(-1)

A la simetría respecto a la recta y=x se volverá posteriormente al analizar cierto tipo de funciones, pero ahora se analizará la simetría respecto a la recta x=p y pare ello se tomará la misma función de la Figura 3. 8 y el eje de simetría será la recta x=3 Figura 3. 27.

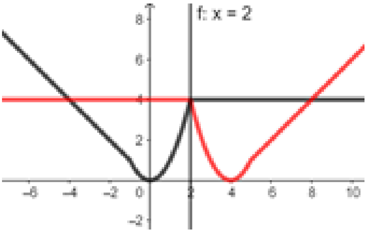


Figura 3.27

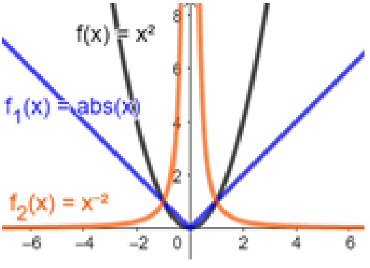


Figura 3.28

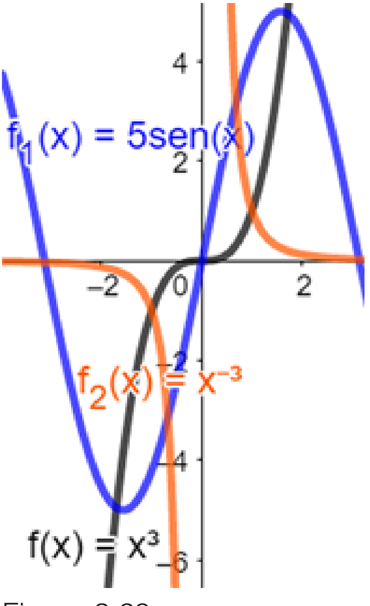


Figura 3.29

El eje x=p como eje de simetría defina una función con dos ramas tal que f(p+x)=f(p-x) de ahí la siguiente definición:

Definición

(f es simétrica respecto a x=p) $\Leftrightarrow$

($\exists$ p$\in$R: f(p+x)= f(p-x),$\forall$ x$\in$Dom f).

Para p=0 el eje x=0 es el eje de ordenadas, en ese caso

f(x)=f(-x), en este caso la función se clasifica como función par, de ahí la definición:

Definición

(fes una función par)$\Leftrightarrow$

(f(x)=f(-x),$\forall$ x$\in$Dom f)

En el capítulo II al analizar las funciones $f(x)=x^2$ y f(x)=|x| se observó que estas dos funciones tenían propiedades similares y una de ellas es que ambas son funciones pares, aunque no se le había dado nombre; en la Figura 3. 28 se muestran funciones pares, observe que la paridad está asociada a la simetría axial respecto al eje de ordenadas.
Asociada a la simetría puntual, para el caso en que ese punto sea el origen de coordenadas, se tiene el concepto de función impar:

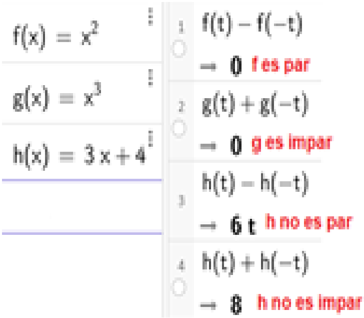


Figura 3.30

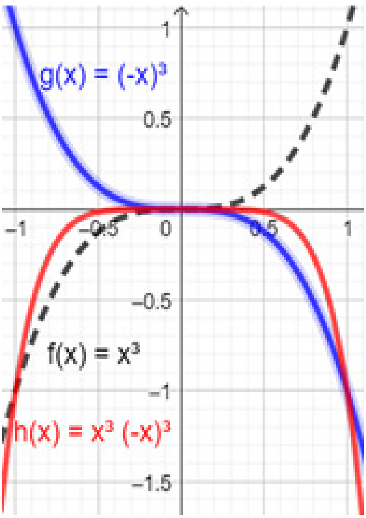


Figura 3.31

El producto de dos funciones impares es una función par.

Definición

(fes una función impar)$\Leftrightarrow$

($f(x)=-f(-x), \forall\ x \in \mathrm{Dom}\ f$)

En Figura 3. 29 se muestran funciones impares.

Asociado a los conceptos de función par e impar se harán algunas precisiones:

1. Al final de cada definición se expresa que esta se cumple $\forall\ x \in \mathrm{Dom}\ f$, es decir, que para todos los valores del dominio debe cumplirse la condición que caracteriza cada tipo de función, por tanto, no basta verificarla con determinado conjunto de números, es necesario realizar una demostración general para todo valor del dominio de la función.
2. En ocasiones el cálculo para la referida demostración es sencillo, ejemplo, demostrar que $f(x)=x^2$ cumple las condiciones de función par o que $f(x)=x^3$ es impar resulta fácil, pero determinar si la función

$$g(x)=36(x^2-4)^4-97(x^2-4)^2+36$$

es par, impar, o si no cumple ninguna de las dos condiciones, no resulta tarea sencilla, al menos para los que no sean versados en el tecnicismo algebraico, por eso se da la siguiente alternativa utilizando GeoGebra:

Para la función par la condición es

$$f(x)=f(-x) \Leftrightarrow f(x)-f(-x)=0$$

Para la función impar es

$$f(x)=-f(-x) \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$$

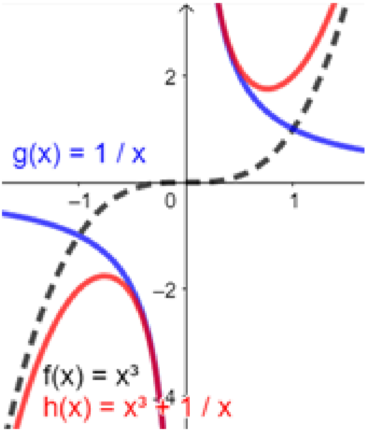


Figura 3.32

La suma de dos funciones impares es una función impar.

La Adaptación de estas condiciones a las posibilidades y exigencias del GeoGebra se muestran en la Figura 3. 30

3. Aunque las condiciones par e impar en la vida práctica se consideran mutuamente excluyentes, al referirnos a las definiciones estudiadas no sucede así y existen funciones que no son ni par ni impar.
4. Solo la función f(x)=0 es al mismo tiempo par e impar; puede comprobarlo a partir de la definición.

En figuras 3.31 y 3.32 se ilustran dos propiedades de las funciones pares e impares, a ellas se puede agregar:

- » La suma y producto de dos funciones pares es una función par.
- » El producto de una función par y una impar es una función impar.

3.6. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función

Definición

(La función f es inyectiva) $\Leftrightarrow$ $((f(x_1)=f(x_2)) \Rightarrow (x_1=x_2, \forall\, x_1, x_2 \in \text{Dom } f))$.

Esta definición significa que: Una función f es inyectiva si a dos valores iguales de la imagen le corresponden valores iguales en el dominio (Figura 3. 33).

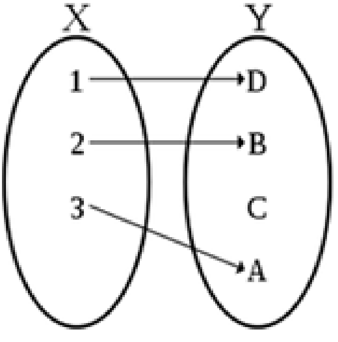


Figura 3.33

Una función f es **inyectiva** si a elementos distintos del conjunto X (dominio) les corresponden elementos distintos en el conjunto Y (codominio o imagen) de f. Es decir, cada elemento

La definición dada es equivalente a su contrarrecíproco del conjunto Y tiene a lo sumo una preimagen en X, o, lo que es lo mismo, en el conjunto X no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

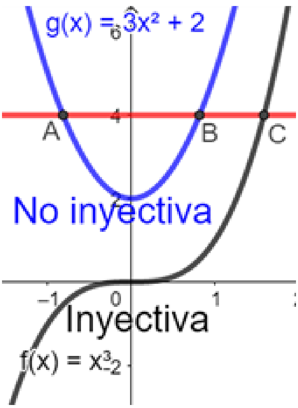


Figura 3.34

El gráfico de la función g es cortada en dos puntos por la recta paralela al eje x, por tanto, no es inyectiva; la función *f* es **inyectiva**, su gráfico es cortado en un solo punto por la recta paralela al eje de abscisas.

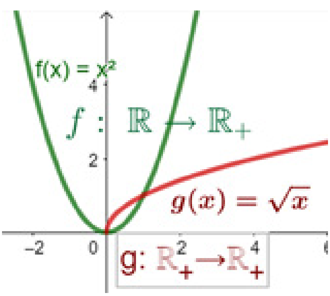
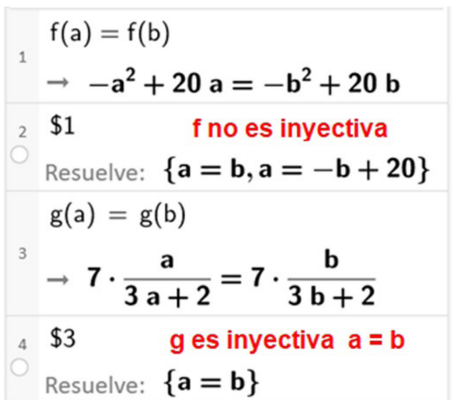


Figura 3.35

$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}\, f, (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))) \Leftrightarrow$ (La función f es inyectiva)

Existe una regla práctica que expresa que si rectas paralelas al eje x corta al gráfico de la función en más de un punto, entonces, la función no es inyectiva (Figura 3. 34), pero, aunque esta regla es fácil para una demostración general es necesario aplicar la definición de inyectividad y esto es posible con el GeoGebra; para las funciones $f(x) = x(20 - x)$ y $g(x) = \frac{7x}{3x+2}$ se tiene:

Es importante también la negación de la definición, porque, mediante un contraejemplo es posible demostrar la no inyectividad de una función.



$(\exists x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}\, f, (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))) \Leftrightarrow$ (La función f no es inyectiva)

Ejemplo 3.5:

Para f(x)=x(20-x) se tiene que

$\exists\, x_1 = 5$ y $x_2 = 15$ tales que f(5)=f(15) por lo tanto, *f(x)* no es inyectiva.

En la gráfica se muestran funciones sobreyectivas.

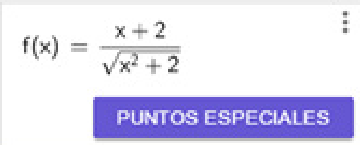


Figura 3.36

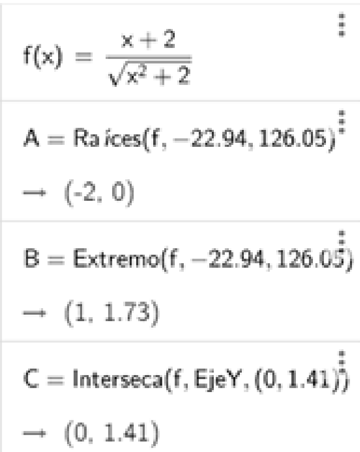


Figura 3.37

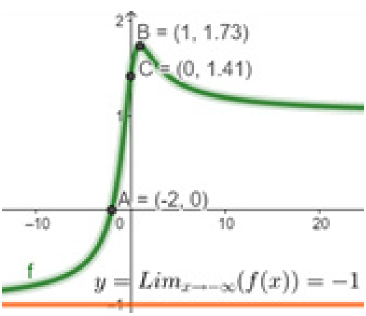


Figura 3.38

Definición

(f:A →B es sobreyectiva)⟺(∀ y ∈B,∃ x∈A:f(x)=y).

Esta definición expresa que una función f:A →B es sobreyectiva si $f_{(A)}$ =B, es decir, si cada elemento de B es imagen de **al menos** un elemento de A.

Para determinar la sobreyectividad de una función se determina la imagen y se comprueba si coincide con el conjunto de llegada. En la práctica se restringe el conjunto de llegada a la imagen de la función.

Ejemplo 3.6:

Sea la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

La imagen de f es:

$$f \text{ es: } (f(x) = y = x^2) \Rightarrow (x = \sqrt{y})$$

La raíz de un número real no negativo es un número real no negativo, por lo que la imagen de f es $\mathbb{R}_+$, entonces la función definida no es sobreyectiva, para que lo sea se redefine f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ : f(x)=x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (Figura 3. 35).

En 3.3 al comentar el empleo del comando “Extremo” de GeoGebra se expresó que “posibilita su aplicación en la determinación de la imagen de las funciones”, retomando esta idea se sugiere para la restricción de la imagen hacer uso del mensaje que devuelve

Observe que por el comportamiento del gráfico se calculó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ el cual acota inferiormente la imagen de la función.

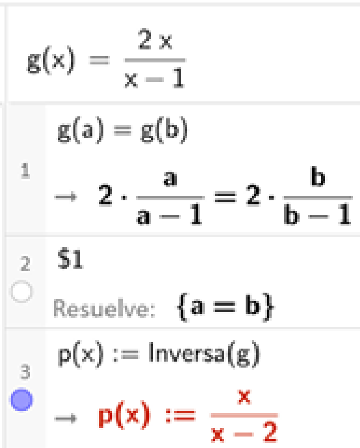


Figura 3.39

1. En (1) se plantea la condición de inyectividad:

   g(a)=g(b)

2. En (2) con el comando "Resuelve" se obtiene la respuesta a=b lo que significa: "la función es inyectiva".

3. En (3) el comando "Inversa (g)" da la respuesta.

GeoGebra cuando el cursor se coloca en la sección donde se ha definido una función (Figura 3. 36). Al hacer clic sobre este mensaje, GeoGebra responde con los cálculos de Figura 3. 37. Con esta información, el gráfico de la función y el cálculo de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (Figura 3. 38) es posible restringir la imagen a:

$$Im\, f = \{y \in \mathbb{R}: -1 < y \leq 1.73\},$$

$$Im\, f = \ ]-1, 1.73].$$

Definición

(f:A →B es biyectiva)⟺(f es inyectiva y sobreyectiva)

La biyectividad de funciones exige a la función $f_{(x)}$ el cumplimiento de dos condiciones, la de ser inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Del concepto de función biyectiva se deriva el importante concepto de función inversa:

Definición

$$(f: A \to B \text{ biyectiva}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists\, f^{-1}(f \text{ inversa}): B \to A: \\ f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \end{pmatrix}$$

Expresando en texto la definición simbólica:

Sif: A →B es una función real biyectiva, entonces, existe la función recíproca o inversa de f denotada por f^{-1}, función de dominio B e imagen A definida por la siguiente regla: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

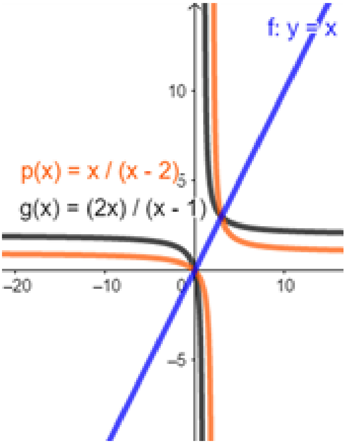


Figura 3.40

y=x es un eje de simetría axial entre g y g^{-1}.

$$g: \mathbb{R}\backslash\{1\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}$$
$$g(x) = \frac{2x}{x-1}$$
$$g^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{2\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

Figura 3.41

Para calcular la inversa de una función GeoGebra da varias alternativas; una de ellas se comentó en 3.5 al tratar la simetría axial respecto al eje y=x; pero existe en esta aplicación el comando “Inversa” que permite calcular la inversa de una función o de una matriz como se explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7:

Calcular la inversa de la función $g(x) = \frac{2x}{x-1}$.

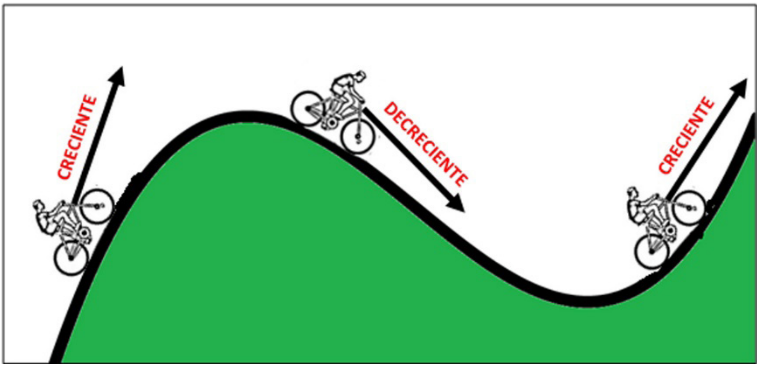
El algoritmo a seguir se da en los comentarios de la Figura 3. 39, y se desarrolla en Figura 3. 40 con una nota sobre la definición la imagen de f a partir del dominio de f^{1}.

TEOREMA:

Si f es simétrica respecto a x=p, (en particular si es par), **entonces** f no es inyectiva.

3.7. Monotonía de una función (crecimiento o decrecimiento).

Una función entre conjuntos ordenados se dice monótona (o isótona) si conserva el orden establecido entre dominio e imagen. Esta clase de funciones surgieron primeramente en cálculo, y posteriormente se extendieron a ramas más abstractas de la matemática como la teoría del orden, pero en general se mantienen los conceptos originales de funciones monótonamente creciente y monótonamente decreciente (o simplemente crecientes y decrecientes), los cuales se corresponden con la idea intuitiva de crecimiento y decrecimiento que se ilustra en la imagen de la Figura 3. 41.



Definición

Se dice que una función $f_{(x)}$ es creciente en un intervalo [a ; b]si para cualesquiera valores $x_1, x_2 \in [a\ ;\ b]$ con $x_1 < x_2$ se cumple: $f_{(x_1)} < f_{(x_2)}$

Definición

Se dice que una función $f_{(x)}$ es de decreciente en un intervalo [a ; b]si para cualesquiera valores $x_1, x_2 \in [a\ ;\ b]$ con $x_1 < x_2$ se cumple: $f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$

Las definiciones dadas, sirven caracterizan y explican por qué una función es creciente o decreciente, pero no resultan prácticas para determinar los valores de la función que cumplen estas condiciones. Atendiendo a este criterio, los autores introducirán algoritmos para determinar los intervalos donde una función es creciente o decreciente, fundamentados estos en conceptos del Cálculo Diferencial y el empleo de la aplicación GeoGebra.

Se comenzará el análisis por la función lineal, la cual es de la forma f(x)=mx+n
Sean dos valores $x_1, x_2 \in$ a[a ; b] con $x_1 < x_2$, a partir de ellos que se construirá la evaluación de $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

1. $x_1 < x_2$
2. Multiplicando por m se tiene:

Si $m>0 \Rightarrow mx_1 < mx_2$

Si $m<0 \Rightarrow mx_1 > mx_2$

3. Sumando n se tiene:

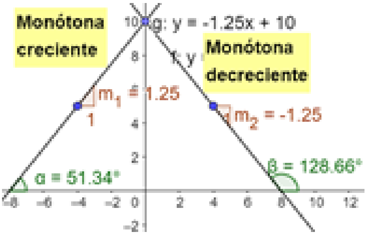


Figura 3.42

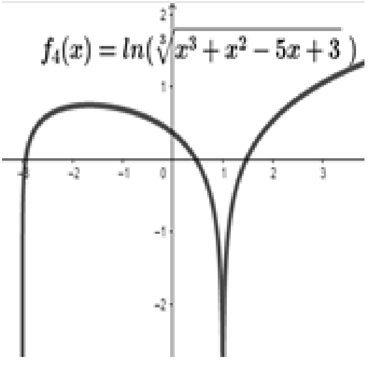


Figura 3.43

La función g(x) es decreciente en $]-\infty,0[$ creciente en [0,2]; en $]2,+\infty[$ la función es constante.

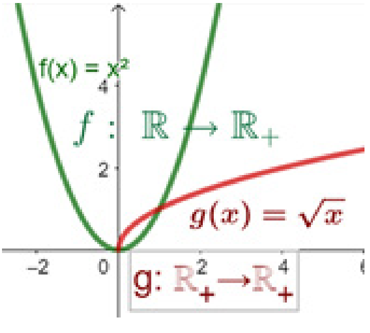


Figura 3.44

Si $m>0 \Rightarrow mx_1+n< mx_2+n$

Si $m<0 \Rightarrow mx_1+n>mx_2+n$

4. Conclusión (1):

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ m < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

5. Conclusión (2): para f(x)=mx+n se tiene que:

$$\begin{cases} Si\ m > 0 \Rightarrow f(x)\ monótona\ creciente \\ Si\ m < 0 \Rightarrow f(x)\ monótona\ decreciente \end{cases}$$

El parámetro m se denomina pendiente de la recta y dadas las coordenadas de dos de sus puntos se calcula por la fórmula:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2); m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En figura 3. 42 se muestran dos rectas, una de función creciente con pendiente positiva y otra decreciente con pendiente negativa, pero también se asocian a si la recta forma con el eje de abscisas un ángulo menor o mayor de 90^o.

En figuras 3. 43, 3. 44 y 3. 45 se analiza la monotonía de funciones estudiadas en epígrafe anteriores, hay funciones en las que el comportamiento de la monotonía varía por intervalos, pero otro importante grupo son crecientes o decrecientes en todo su dominio.

TEOREMA:

Si f es creciente o decreciente en todo su dominio, **entonces** f es inyectiva.

La relación entre signo de la pendiente de una recta y su monotonía será

La función f(x) decreciente en $]-\infty,0[$ y creciente en $[0,+\infty[$. g(x) es creciente en todo su dominio.

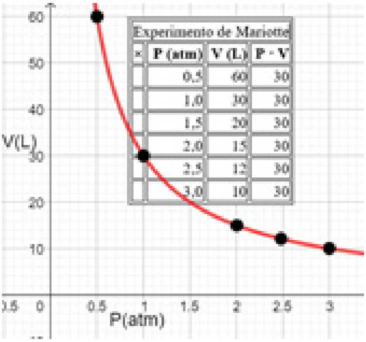


Figura 3.45

Función decreciente en todo su dominio.

tomada como punto de partida para determinar en qué intervalo una función es creciente o decreciente, es decir, se estudiará el comportamiento del signo de las pendientes de las rectas que son tangentes a una curva y la monotonía (creciente o decreciente) de esta función.

Sea la gráfica de la función $f(x)=x^3-8x+7$ utilizada en la Figura 3. 41 que sirvió de introducción al tema, en esta gráfica se han realizado las siguientes acciones:

1. Trazar rectas tangentes a la curva en los puntos A, B, C, D, E, F, G, H.
2. Calcular las pendientes de rectas tangentes $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$

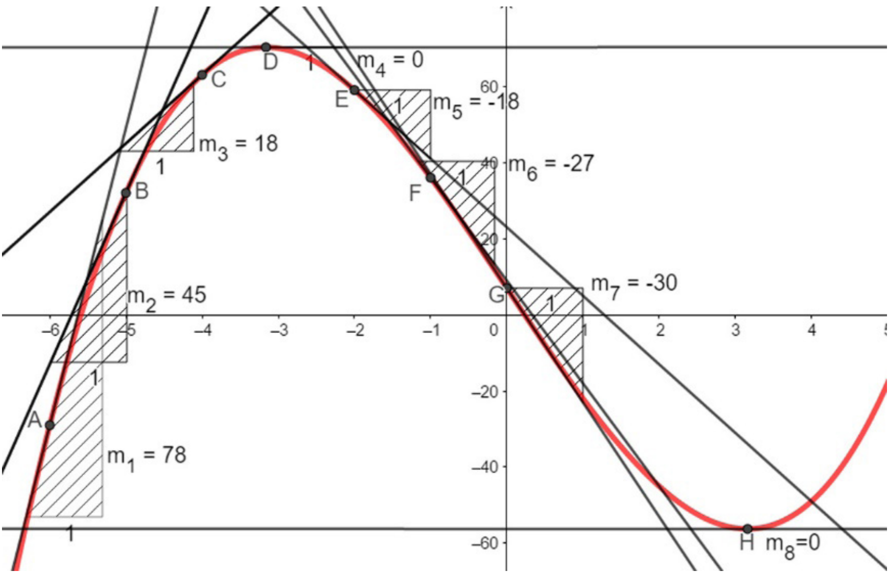


Figura 3.46

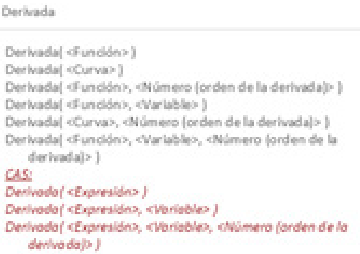


Figura 3.46

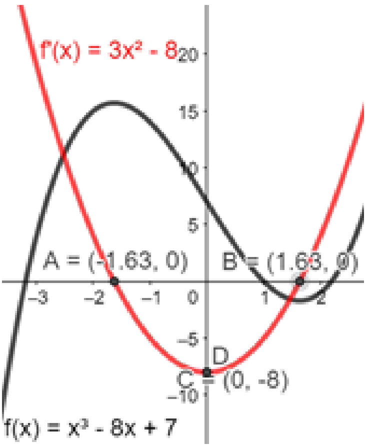


Figura 3.47

Los ceros de la función f'(x) indican que la misma toma valores positivos en ⊢]-∞,-1.63⊣[, en -1.63 tiene un cero f'(x) y un extremo f(x); en [-1.63,1.63] f'(x)<0, y f(x) es decreciente, en 1.63 hay otro extremo y para x>1.63, f'(x) está por encima del eje de abscisas, f(x) vuelve a ser creciente.

En Figura 3. 46 observe que:

1. La función es monótona creciente para las x con valores menores que la abscisa del punto D.
2. La función es monótona decreciente para las x perteneciente al intervalo comprendido entre las abscisas de los puntos D y H.
3. Las pendientes m_1, m_2, m_3 correspondientes a las tangentes a los puntos {A, B, C} toman valores positivos {78, 45, 18}.
4. Las pendientes m_5, m_6, m_7 correspondientes a las tangentes a los puntos {E, F, G} toman valores negativos {-18, -27, -30}.
5. Las pendientes de las rectas que son tangentes a los puntos D y H toman valor “cero” (0). Recuérdese que en 3.3 estos puntos fueron tratados como “extremos de la función”

De lo anterior se infiere que, si existiera una función, llamémosla d caracterizada por: d: x∈Dom f→m_Tf

m_{Tf}: Pendiente de la recta tangente a f en (x,f(x))

se podría concluir que:

Si d(x)>0 entonces f es creciente

Si d(x)=0 entonces en (x,f(x))hay un extremo de f

Si d(x)<0 entonces f es decreciente

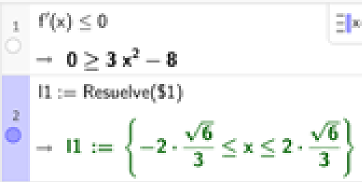


Figura 3.48

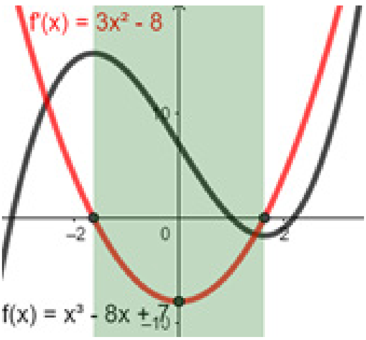


Figura 3.49

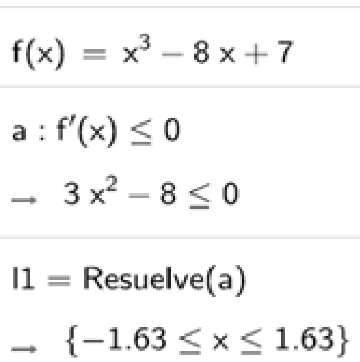


Figura 3.50

La función que se ha descrito existe, su estudio corresponde al Cálculo Diferencial y se llama derivada de la función f, posee las bondades descritas, tiene diferentes notaciones, aquí se empleará la notación $f'(x)$.y su estudio marcó un gran avance en el desarrollo de toda la ciencia a partir del siglo XVII.

Los autores no pretenden realizar un estudio de la función derivada, el objetivo es aplicar la relación derivada-monotonía de una función empleando las posibilidades que ofrece el GeoGebra con su colección de comandos de fácil empleo que posibilitan el cálculo y operaciones con derivas de funciones (Figura 3. 46).

Ejemplo 3.8:

Continuando con la función $f(x)=x^3-8x+7$, al escribir en la celda de entrada del GeoGebra $f'(x)$ aparece como respuesta de inmediato la función derivada ($f'(x)=3x^2-8$) y el gráfico correspondiente como se muestra en Figura 3. 47 y si se ejecutan los comandos “extremos” y “raíces” para $f'(x)$ se obtienen los puntos que se muestran en la referida figura, cuya interpretación aparece en los comentarios de pie de figura.

En Figura 3. 48 aparece en vista CAS la inecuación $f'(x)\leq 0$ para determinar los intervalos donde la función f es decreciente y da la respuesta $\frac{-2\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ como resultado se obtuvo el gráfico de la Figura 3. 49 que

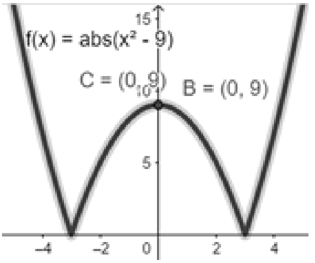


Figura 3.51

$f'(x) = f'(x)$

$\rightarrow\ 2\,x\,\dfrac{|x^2-9|}{x^2-9}$

$D = \text{Interseca}(f', \text{EjeX}, (0,0))$

$\rightarrow\ (0,\ 0)$

$a : f'(x) \geq 0$

$\rightarrow\ 2\,x\,\dfrac{|x^2-9|}{x^2-9} \geq 0$

$l1 = \text{Resuelve}(a)$

$\rightarrow\ \{-3 \leq x \leq 0, x \geq 3\}$

Figura 3.52

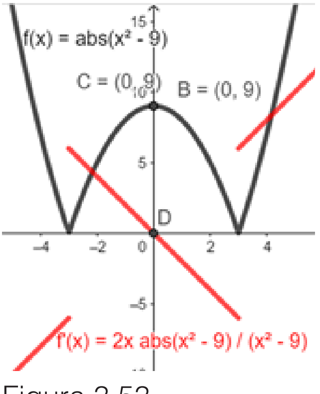


Figura 3.53

marca el intervalo donde la función es decreciente.

En la vista algebraica Figura 3. 50 se muestra la solución de la inecuación $f'(x) \leq 0$ pero desde la vista algebraica, se tiene el mismo resultado, pero en notación decimal.

Algoritmo para determinar la monotonía de una función con GeoGebra.

1. Definir la función $f(x)$.
2. Analizar el gráfico de $f(x)$particularmente "LOS PUNTOS ESPECIALES".
3. Calcular $f'(x)$
4. Analizar el gráfico de $f'(x)$ particularmente "LOS PUNTOS ESPECIALES"
5. Determinar los valores que satisfacen la inecuación $f'(x) \geq 0$ ó $f'(x) \leq 0$, comando "Resuelve".
6. Concluir las condiciones de monotonía de la función.

Ejemplo 3.9

Determinar la monotonía de la función $f(x)=|x^2-9|$ siguiendo el algoritmo dado.

En Figura 3. 51 se muestra lo planteado en puntos 1 y 2 del algoritmo.

En Figura 3. 52 están los puntos 1,4,5 que se complementan con el gráfico de Figura 3. 53.

Punto 6: **CONCLUSIÓN**: la función es creciente para los valores comprendidos en [-3,0] y para las x tales que x≥3 y decreciente fuera de estos intervalos.

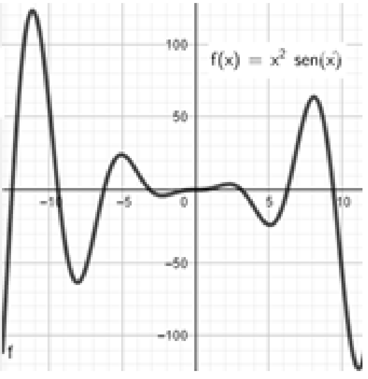


Figura 3.54

Función continua

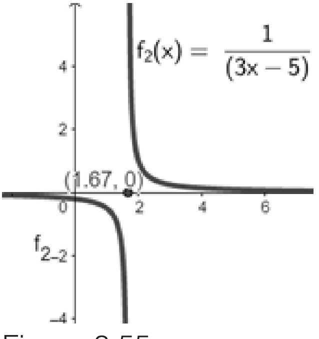


Figura 3.55

Función discontinua

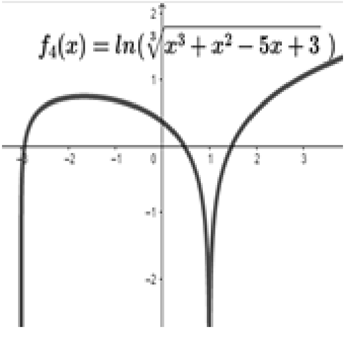


Figura 3.56

3.8. Continuidad de una función.

Una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es aquella cuyo grafo es un conjunto conexo, (formado por una sola 'pieza', que no se puede 'dividir'), es decir, su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

Esta idea intuitiva se ha tratado de precisar con expresiones como: "una función continua es aquella en la que pequeñas variaciones de la función implican que deben estar cercanos los puntos", pero indudablemente, la formulación precisa del concepto ha sido el resultado del largo proceso de desarrollo histórico de las ciencias matemáticas y hoy es uno de los conceptos básicos del análisis matemático y de la topología general, pero por los propósitos de este libro no es posible tratarlo, no obstante, por la importancia de las funciones continuas se **inicia la formación de este concepto** (observe el subrayado) a partir de las ideas intuitivas descritas, orientado a la identificación y diferenciación entre funciones continuas y discontinua.

Las gráficas de las figuras 3. 54 y 3. 57 son continuas, la primera es una función formada por el producto de dos funciones continuas $f(x)=x^2$ y $g(x)=Sen(x)$, mientras que la segunda es una función definida por ramas de funciones continuas en cada rama

Las gráficas de las figuras 3. 55 y 3.56 son discontinuas; la discontinuidad de $f_2(x) = \frac{1}{3x-5}$ viene dado porque f_2 no

Función discontinua.

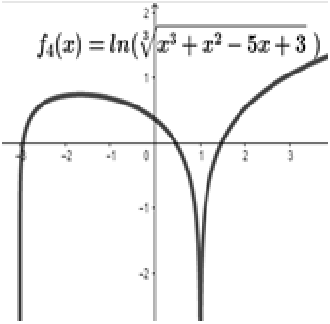


Figura 3.57

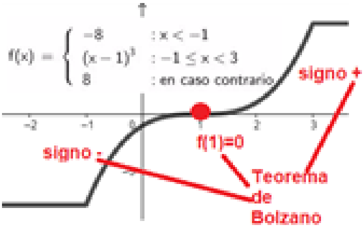


Figura 3.58

La función graficada está acotada: $-8 \leq f(x) \leq 8$; es continua y cambia de signo en el intervalo[-1,3] , tiene un cero en x=1: f(1)=0

Figura 3.59

está definida para $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$; la discontinuidad de g(x) está dado por la definición por ramas en cuyos extremos, ante pequeñas variaciones de la función los valores que toma la función no están cercas así g(3)=1 y g(3.00000001)=4.

Definición

f(x) es acotada superiormente si existe K real tal que *f(x)≤K* para cualquier x ∈ Dominio de f.

f(x) es acotada superiormente si $\exists K \in R$:

$f(x) \leq K \ \forall x \in D$

f(x) es acotada inferiormente si $\exists k \in R$:

$f(x) \geq k \ \forall x \in D$

TEOREMAS:

1. Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a ,b], entonces está acotada.
2. Teorema de Bolzano Si una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a, b] toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo, existe al menos un punto c interior al mismo en el que f(c) = 0
3. Teorema de Weierstrass Si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b], el conjunto de valores f(x) correspondientes a los puntos de dicho intervalo tiene un máximo y un mínimo.
4. Teorema de los valores intermedios Si f(x) es continua en un intervalo [a,

Bernard Bolzano (Praga, República Checa), 5/10/1781 – 18/12/1848), sacerdote, matemático, lógico, filósofo y teólogo

Figura 3. 60

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 31 de octubre de 1815~Berlín, 19 de febrero de 1897). matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno».

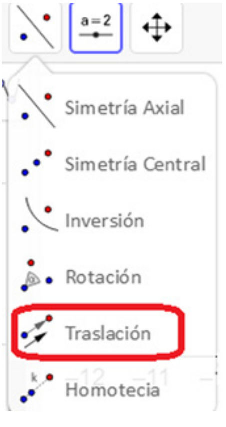


Figura 3. 61

b] y k un número real comprendido entre f(a) y f (b), existe al menos un punto c interior a dicho intervalo en el que f(c) = k, es decir, f(x) pasa de f(a) a f (b) tomando todos los valores intermedios entre f(a) y f (b)

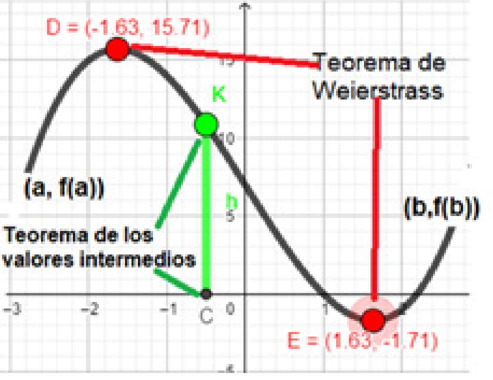


Figura 3. 62

3.9. Traslación, contracción y dilatación del gráfico de una función

En geometría, una traslación es una isometría en el espacio euclídeo caracterizada por un vector $\vec{u}$, tal que, a cada punto P de un objeto o figura se le hace corresponder otro punto P'. Las traslaciones mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector.

GeoGebra posee el comando **Traslada** con la siguiente sintaxis para trasladar una función por un vector: Traslada [Función, Vector]. También es posible utilizar el menú de Figura 3. 62.

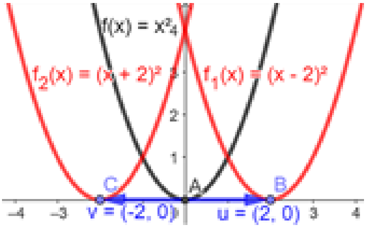


Figura 3. 63

En Figura 3. 63 se muestra la traslación de $f(x)=x^2$ desplazada por los vectores u $\vec{u} = \binom{2}{0}$ y $\vec{v} = \binom{-2}{0}$. En general $f(x+|h|)$ traslada a $f(x)$ h unidades a la derecha, mientras $f(x-|h|)$ lo hace a la izquierda.

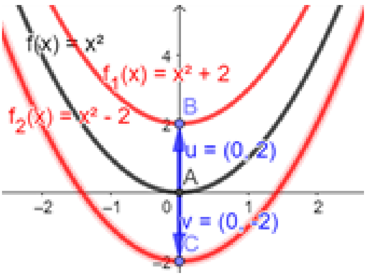


Figura 3. 64

En Figura 3. 64 se muestra la traslación de $f(x)=x^2$ desplazada por los vectores $\vec{u} = \binom{0}{2}$ y $\vec{v} = \binom{0}{-2}$. En general $f(x)+|k|$ traslada a $f(x)$ k unidades hacia arriba, mientras $f(x)-|k|$ lo hacia abajo.

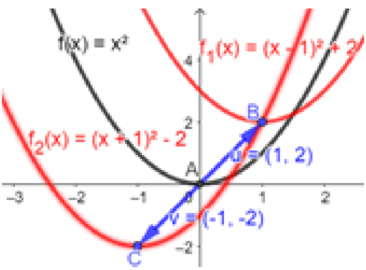


Figura 3. 65

En Figura 3. 65 se muestra la traslación de $f(x)=x^2$ desplazada por los vectores u $\vec{u} = \binom{1}{2}$ y $\vec{v} = \binom{-1}{-2}$. En este caso se trata de la combinación de una traslación horizontal y otra vertical la traslación $f_1(x)=(x-1)^2+2$ tiene por modelo $f(x-|h|)+k$, traslado al punto (1,2) es decir, 1 unidad a la izquierda y 2 hacia arriba.

La función $f(x)=x^2$ ha servido de punto de partida para explicar la traslación del gráfico de una función, y con ella y con $f(x)=x^3$ se estudiará la dilatación y la contracción del gráfico de una función.

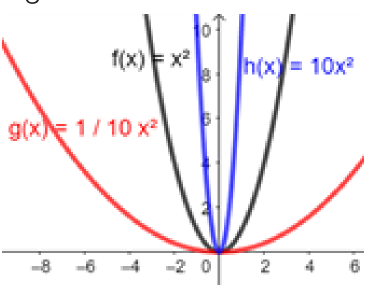


Figura 3. 66

Dilatación y contracción en el eje y.

En Figura 3. 66 se muestran las gráficas de $f(x)=x^2$, $h(x)=10x^2$ y $g(x)=\frac{1}{10}x^2$, el gráfico de h "se acerca" al eje de ordenadas, se dice que la gráfica de h es **una**

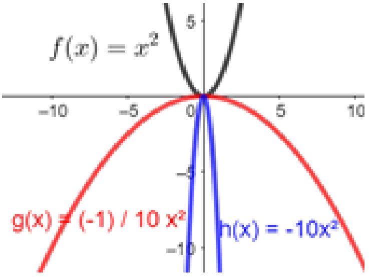


Figura 3. 67

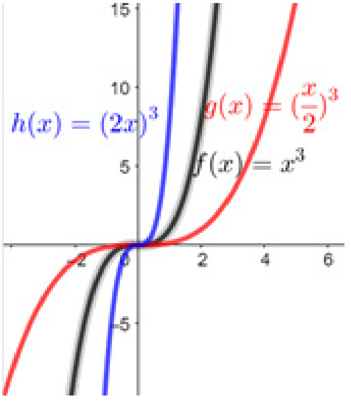


Figura 3. 68

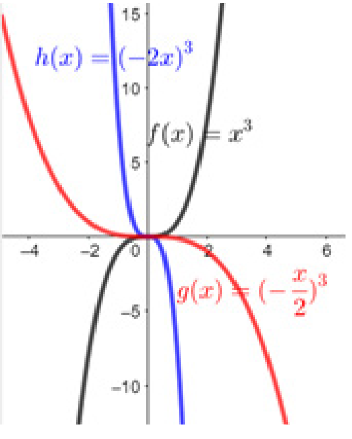


Figura 3. 69

dilatación en el eje y de la gráfica de la función *f*, en contraposición el gráfico de g es **una contracción** en el eje y de la misma función; en general,

$$f_1(x) = \alpha f(x) \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow f_1 \; dilatación \; de \; f \\ 0 < \alpha < 1 \Rightarrow f_1 \; contracción \; de \; f \end{cases}$$

En Figura 3. 67 se muestran las gráficas donde ***α<0***, en estos casos primero se produce una reflexión respecto al eje de abscisas de la función f y posteriormente se desarrollan la correspondiente dilatación y contracción.

$$\begin{cases} \alpha < -1 \Rightarrow f_1 \; reflexión \; y \; dilatación \; de \; f \\ -1 < \alpha < 0 \Rightarrow f_1 \; reflexión \; y \; contracción \; de \; f \end{cases}$$

Dilatación y contracción en el eje x.

El factor α de contracción o dilatación afecta ahora la variable x y tomando de ejemplos los gráficos de la Figura 3. 68 se tiene que en general, la contracción y dilatación respecto al eje x se comporta del siguiente modo:

$$f_1(x) = f(\alpha x) \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow f_1 \; contracción \; de \; f \\ 0 < \alpha < 1 \Rightarrow f_1 \; dilatación \; de \; f \end{cases}$$

En la Figura 3. 69 se muestran las gráficas donde ***α<0***, en estos casos primero se produce una reflexión respecto al eje de ordenadas de la función f y posteriormente se desarrollan la correspondiente dilatación y contracción.

$$\begin{cases} \alpha < -1 \Rightarrow f_1 \; reflexión \; y \; contracción \; de \; f \\ -1 < \alpha < 0 \Rightarrow f_1 \; reflexión \; y \; dilatación \; de \; f \end{cases}$$

Ejercicios o problemas resueltos

Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

Determinar:

i. Su gráfico.

ii. Dominio e imagen de f .

iii. Ceros y signos de f.

iv. Puntos fijos si existen en f .

v. Determinar simetría y paridad de f .

vi. Inyectividad de f .

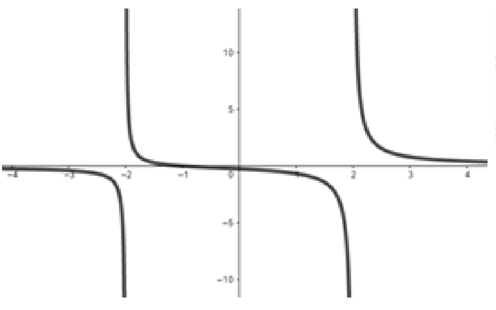
vii. Monotonía de f por intervalos.

viii. Continuidad o discontinuidad de f , en este último caso indique los puntos o intervalos de discontinuidad.

ix. Haga una traslación de la función de ser posible hacia los puntos A (0,1), B (-1,0), C (2,1), D (-1,2), dando la ecuación de la nueva función.

SOLUCIÓN

i.



4 $f(x) = x$

$\rightarrow \frac{x+1}{x^2-4} = x$

5 \$4

Resuelve: $\{x = -2.13, x = -0.2, x = 2.33\}$

ii. Dom *f*: $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

Para calcular imagen utilizando el comando Resuelve de GeoGebra en la opción CAS se tiene que:

Resuelve:

$$\left\{x = \frac{-\sqrt{16\,y^2+4\,y+1}+1}{2\,y}, x = \frac{\sqrt{16\,y^2+4\,y+1}+1}{2\,y}\right\}$$

De ahí que Im $f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

iii. Ceros

$A = \text{Raíces}(f, -4.6, 7.23)$

$\rightarrow (-1, 0)$

Signos

$]-2,-1] \cup]2,+\infty[$ positivo

$]-\infty,-2[\cup [-1,2[$ negativo

iv. Puntos fijos. Utilizando el comando Resuelve de GeoGebra en la opción CAS se tiene que la función tiene tres puntos fijos:

v. La función no es ni par ni impar el siguiente cálculo lo evidencia:

2	$f(-x)$ $\rightarrow \dfrac{-x+1}{x^2-4}$
3	$-f(-x)$ $\rightarrow \dfrac{x-1}{x^2-4}$

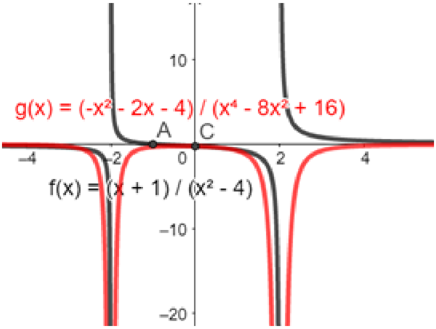
vi. El gráfico evidencia que la función no es inyectiva, cualquier recta paralela al eje de las abscisas corta al gráfico en más de un punto.

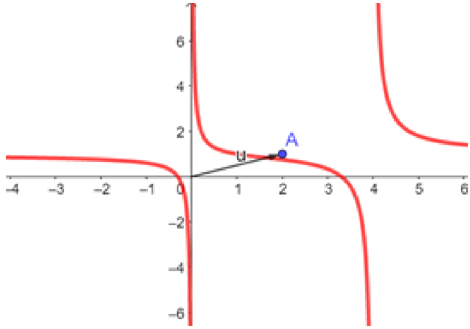
vii. El gráfico evidencia que la función es decreciente en todo su dominio, pero utilizando la vista CAS del GeoGebra también corrobora esta inferencia utilizando el criterio de la derivada como se muestra en la imagen.

5	$f'(x) > 0$ $\rightarrow$ **false**
6	$f'(x) \leq 0$ $\rightarrow$ **true**

En el gráfico se muestra en negro la función y en rojo su derivada, donde se puede observar que este último está por debajo del eje de abscisas.

viii. La función tiene dos puntos de discontinuidad: x=-2 y x=2





Se evidencia en el gráfico, pero es posible calcular los ceros del denominador de la fracción

ix. Por ser similar el procedimiento para otros vectores solamente se muestra la traslación para C (2,1)

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

$$f_1(x) = \text{Traslada}(f, u)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2-4} + 1$$

Punto

$$A = (2, 1)$$

Vector

$$u = \text{Vector}(A)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios y problemas propuestos

III.1. Dada las funciones:

1. $f(x)=2x-5$
2. $g(x)=x^2-2x+5$
3. $h(x)=\pi$
4. $j(x)=\sqrt[6]{2x-3}$
5. $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$
6. $s(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $h(x)=\sqrt[4]{\frac{x^3-4x}{x^2-9}}$
8. $g(x)=x^5-13x^3+36x$
9. $h(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-1}$
10. $f(x)=\begin{cases} 2x-8, si\ x>3 \\ 0\ si\ x=3, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2-4x, si\ x<3 \end{cases}$
11. $y=\begin{cases} x^2-4, si\ x<3 \\ 0, si\ 3 \leq x < 5 \forall x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2+3x}, si\ x \geq 5 \end{cases}$
12. $g(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2+3}$
13. $h(x)=\frac{x^5-5x^3+4x}{x^2-4x+3}$
14. $s(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
15. $q(x)=3^x+3^{-x}$
16. $y_1=\sqrt{x^2+4}$

17. $y_2 = \sqrt{x^2 - 4}$

18. $y_3 = \frac{x}{x+3}$

19. $y_4 = \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$

20. $y_5 = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

21. $y_6 = \frac{1}{2x+1} + \ln(x+1)$

22. $y_7 = \frac{4x+5}{\ln(5-x)}$

23. $y_8 = \sqrt{x} + \frac{1}{x-2} - \ln(2x-3)$

24. $g_3(x) = \begin{cases} x^3, \text{si } x < -1 \\ x^2, \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x+2}, \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

25. $g_4(x) = \begin{cases} 2x - 8, \text{si } x > 3 \\ 0, \text{si } x = 3 \\ x^2 - 4x, \text{si } x < 3 \end{cases}$

26. $g_4(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{si } x > 3 \\ 0, 3 \leq \text{si } x < 5 \\ \sqrt{x^2 + 3x}, \text{si } x < 3 \end{cases}$

27. $h_1(x,y) = x^2 + y^2$

28. $h_2(x,y) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+y}$

29. $h_3(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

30. $h_4(x,y) = \sqrt{xy}$

31. $h_5(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

Determinar:

i. Sus gráficos.

ii. Dominio e imagen de cada función .

iii. Ceros y signos de cada función.

iv. Puntos fijos si existen de cada función.

v. Determinar simetría y paridad de cada función.

vi. Determinar la Inyectividad o no de cada función.

vii. Monotonía de cada función por intervalos.

viii. Continuidad o discontinuidad de cada función, en este último caso indique los puntos o intervalos de discontinuidad.

ix. Haga una traslación de la función de ser posible hacia los puntos

a) A (0,1), C (2,1) (numeradas del1-15)

b) B (-1,0), D (-1,2) (numeradas del16-26)

x. Dando la ecuación de la nueva función.

III.2. De solución a los siguientes problemas:

i. Para proteger un terreno rectangular se precisan 2000 metros de alambrada, si una de las dimensiones es x(m), expresar el área, y(m2), en función de x. Determinar el dominio de la función definida.

ii. Expresar la longitud l de una cuerda de una circunferencia de 8 cm de radio en función de su distancia: x al centro. Determinar el campo de variación de x.

iii. Cada uno de los vértices de una placa cuadrada de aluminio de 12 cm de lado, se cortan pequeños cuadrados de x cm de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Expresar el volumen v(cm3) en función de x y determinar el campo de variación de x.

iv. Un rectángulo de perímetro P rota alrededor de una de sus caras de forma que genera un cilindro. Hallar la dependencia funcional entre el volumen del cilindro y una de sus dimensiones. Halle dominio de definición.

v. Un trozo de alambre de longitud L se corta en dos partes, y cada parte se dobla para formar un cuadrado. Exprese la suma de las áreas de los dos cuadrados en función del lado del cuadrado mayor. Halle en cada caso el dominio de definición.

vi. Se desea construir un depósito en forma de cilindro circular recto con capacidad para 5 litros. Exprese su área en función del radio. Halle el dominio de variación del radio.

vii. Si se añaden 2 metros a cada lado de cierto cuadrado, su área se incrementa en 100 m2. ¿Cuál es el área original del cuadrado?

viii. Un agricultor desea cercar un campo rectangular con 1200 metros de espino. Si un río corre a lo largo de un lado del campo, por lo que no se requiere cercarlo y el área del campo es de 160000 m2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

CAPÍTULO IV.
LAS FUNCIONES LINEALES

"Todas las problemáticas relacionadas con la proporcionalidad directa conllevan a funciones lineales, de aquí que su aplicación se extienda a los problemas relacionados con móviles, llenado de tanques, cálculo porcentual aligación, cambios de temperatura, etcétera".

(Ochoa Rojas, 2008)

4.1. Funciones lineales

En el capítulo III se hizo mención de la función lineal, entonces se dijo que:

1. "La función lineal de la forma *f(x)=mx+n*
2. $\begin{cases} Si\ m > 0 \Rightarrow f(x)\ monótona\ creciente \\ Si\ m < 0 \Rightarrow f(x)\ monótona\ decreciente \end{cases}$
3. El parámetro m se denomina pendiente de la recta y dadas las coordenadas de dos de sus puntos se calcula por la fórmula:

   $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2); m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$"

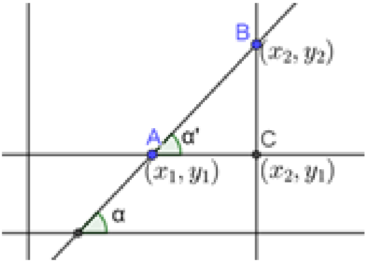


Figura 4. 1

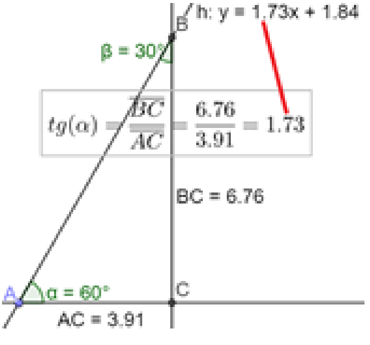


Figura 4. 2

En Figuras 4.1 y 4.2 se muestra la relación que existe en la pendiente de una recta y la función trigonométrica tangente del ángulo de inclinación de dicha recta, $(tan(\alpha)\ o\ tg(\alpha))$, de modo que en general se tiene: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg(\alpha)$

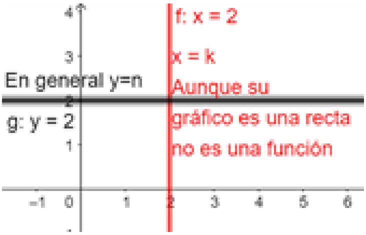


Figura 4. 3

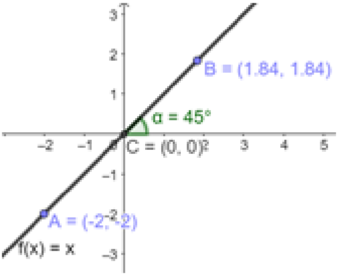


Figura 4. 4

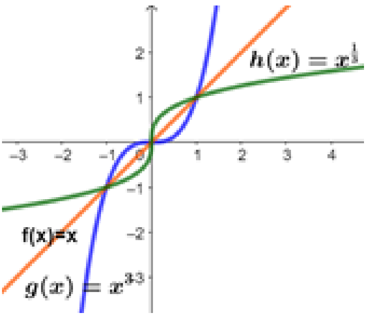


Figura 4. 5

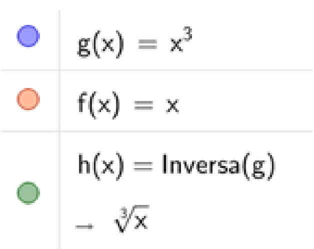


Figura 4. 6

4.2. Casos particulares de la función lineal.

Funciones constantes

Un caso particular de la función lineal se da cuando $m=0$, en ese caso el gráfico de la recta no intercepta el eje x, la función adopta la forma $f(x)=n$ o $y=n$ y se representa por una recta paralela al eje de las abscisas, (Figura 4.3).

Función idéntica.

La función idéntica (Figura 4.4) tiene como particularidad que: $m=1$ y $n=0$ y está definida por

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x)=x, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Características de la función:

Dominio f	$\mathbb{R}$	Imagen f	$\mathbb{R}$
Extremos globales		No tiene	
Ceros		x=0,punto(0,0)	
Intersección con eje y		punto(0,0)	
Signos		Positivo en $\mathbb{R}_+^*$ Negativo en $\mathbb{R}_-^*$	
f es sobreyectiva			
f es estrictamente creciente en todo su dominio			

La función idéntica se comporta como eje de simetría entre una función y su inversa. Ver las dos imágenes anteriores y en Figura 3.24

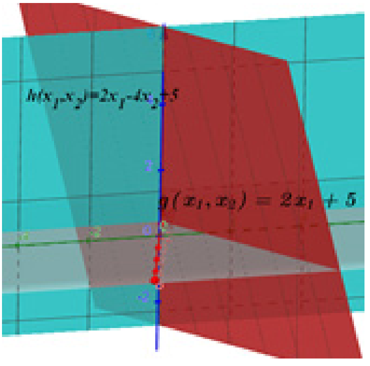


Figura 4. 7

Para $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ se obtiene la ecuación de un plano

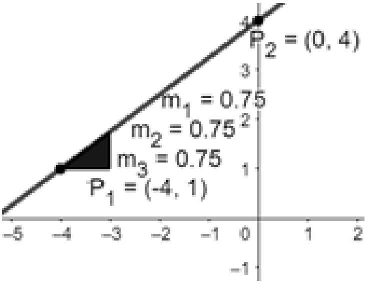


Figura 4. 8

Ecuación de la recta que pasa por un pun-to con pendiente da-da:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=0.75(x+4)$

f es impar	
f no es simétrica respecto a x=p	
f tiene puntos fijos en todos los números reales.	

La función idéntica es además aditiva y multiplicativa, dos propiedades que no se han definido y que se definirán a continuación:

Definición:

$(f:A \longrightarrow B \text{ es aditiva}) \Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y \in A$

Para la función idéntica se tiene:

$f(x+y)=x+y=f(x)+f(y)$

Definición:

$(f:A \longrightarrow B \text{ es multiplicativa}) \Leftrightarrow f(x\times y)=f(x)\times f(y), \forall x,y \in A$

Para la función idéntica se tiene:

$f(x\times y)=x\times y=f(x)\times f(y)$

Una generalización del concepto de función lineal, es:

Definición

Una función lineal tiene la forma

$f(x_1,\dots,x_n)=a_1 x_1+\dots+a_n x_n+b$ Cualquier función que no se pueda expresar de esta forma es una función no lineal. Casos particulares son: $f(x)=mx+n$ y $f(x_1, x_2)=ax_1+bx_2+c$

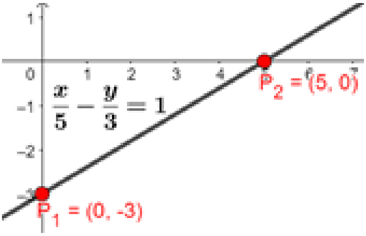


Figura 4. 9

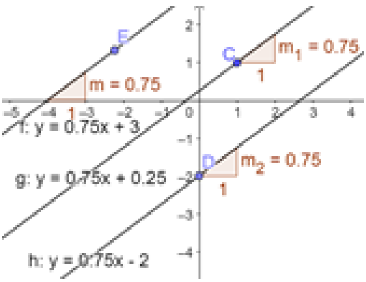


Figura 4. 10

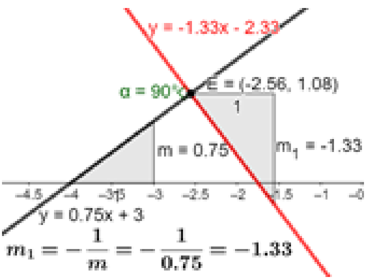


Figura 4. 11

4.3. Ecuación cartesiana de la recta

Definición:

Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomando dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m calculada por la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$ resulta siempre constante (Figura 4.8).

Observe que:

La pendiente es fundamental para el estudio de la función lineal; en capítulo III se relacionó con la derivada de la función para explicar su monotonía y ahora se emplea para definir la línea recta como lugar geométrico. Para la geometría cartesiana (de Descartes) a cada lugar geométrico se le corresponder una ecuación y viceversa.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

En la nota de la Figura 4.8 se da la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada; ahora el proceso lleva a sustituir m su valor:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

Ecuación simétrica de la recta.

La recta cuyas intercepciones con los ejes X y Y son: $a\neq0, b\neq0$ (Figura 4.9) tiene por ecuación

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Las pendientes también determinan la relación de posición de las rectas:
En Figura 4.10 se muestran tres **rectas paralelas y sus pendientes tiene el mismo valor**.

En Figura 4.11 se muestran dos **rectas perpendiculares**, el valor de la pendiente de una es el recíproco con signo contrario del valor de la pendiente de la otra.

Antes de continuar, dos precisiones de los autores:

1. Desde el capítulo I se ha utilizado el asistente GeoGebra para ilustrar los conceptos, sus definiciones y la introducción de nuevos contenidos; también se han hecho cálculos que probablemente el lector no sabía y que eran necesarios para el tratamiento de ciertos temas, como es el caso de la tangente trigonométrica de un ángulo y la derivada de una función. También se han planteado tareas y ejercicios utilizando el GeoGebra porque los medios de cómputos son valiosos auxiliares de la ciencia contemporánea, particularmente para la matemática y es propósito de los autores familiarizar al lector con esta tecnología.
2. La computadora es un medio que no puede ser vista por profesores y alumnos como una **caja negra**[2]. No tiene sentido utilizar el GeoGebra pensando lo fácil que resulta dibujar dos puntos sobre la pantalla y obtener automáticamente una ecuación o un número que no sabría calcular manualmente. Bajo esta concepción, la

2 La **caja negra** fue una metáfora de los positivistas para designar aquel elemento estructural de un modelo abstracto sobre el funcionamiento de un sistema que se halla entre la entrada (input) y la salida (output).La corriente conductista la utilizó en sus inicios para designar procesos cogniti-vos de procesamiento mental interno definidos por el conductismo clásico como no observables, y definieron como contenido de la «caja negra» todo lo que es inexplorable (o no interesante), o que no es susceptible definir de manera operacional, ni de medir directamente con instrumen-tos científicos.

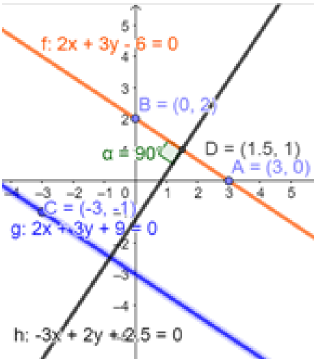


Figura 4.12

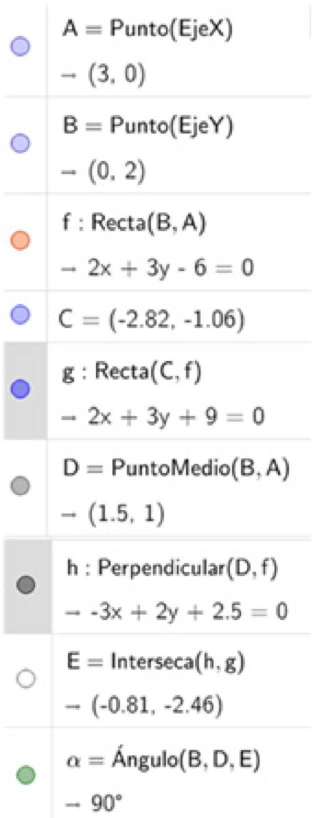


Figura 4. 13

computadora es un artefacto electrónico al que se le suministran datos de entrada y en "forma misteriosa", los procesa y devuelve un resultado, pero el usuario no sabe cómo transcurre tal proceso, convirtiéndose en un esclavo dependiente de la computadora y ese no es nuestro propósito.

Por eso se ha enfatizado en la teoría matemática y en este capítulo se ha dado la definición de línea recta como lugar geométrico, se han presentado las ecuaciones de la recta **para su cálculo manual** y se continuará el estudio de la ecuación general de la recta; además, a medida que se profundice en el estudio de las funciones, se complementarán temas que no han sido tratado con el rigor que exige la matemática, al tiempo que se seguirá utilizando el GeoGebra como un importante medio de procesamiento de la información matemática.

Ejemplo 4.1:

Dada la ecuación de la recta f: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

a) Determine la ecuación de la recta g que pasa por el punto C= (-3,-1) y es paralela al f.

b) Halle la ecuación de la recta h que es perpendicular a f en el punto medio del segmento que une sus interceptos con los ejes de coordenadas.

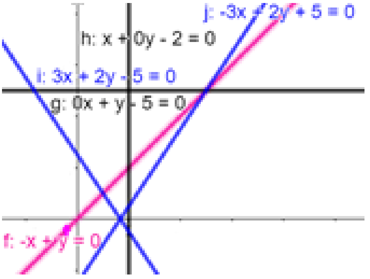


Figura 4. 14

En la gráfica se tiene:

1. Si B=0 y A≠0 la ecuación se reduce a

   x=$-\frac{C}{A}$

2. Si B≠0 entonces, dividiendo por B se tiene:

   $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$

Haciendo

$m=-\frac{A}{B}$ y $n=-\frac{C}{B}$

Se tiene la ecuación

y=mx+n

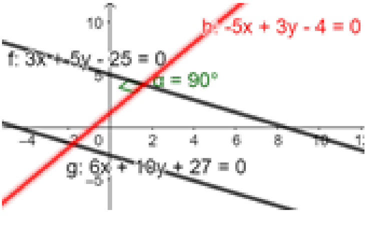


Figura 4. 15

Soluciones

a) Hay que determinar la pendiente de la recta f, la cual pasa por los puntos A= (3,0) y B= (0,2).

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$$

Como la recta paralela pasa por C= (-3,-1), la ecuación punto pendiente $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y+1=-\tfrac{2}{3}(x+3)\Rightarrow 3y+3=-2x-6\Rightarrow$$

$$2x+3y+9=0$$

b) El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es M=$\left(\frac{3}{2},1\right)$ y la pendiente de h para cumplir la condición de perpendicularidad es m=$\frac{3}{2}$ por tanto, la nueva ecuación es:

$$y-1=\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow 2y-2=3x-\frac{9}{2}\Rightarrow$$

$$-6x+4y+5=0$$

En Figuras 4.12 y 4.13 se muestra el procesamiento hecho con GeoGebra.

4.4. Forma general de la ecuación de una recta

En los epígrafes precedentes se ha visto que la ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es una expresión lineal con formatos que se corresponden con los datos de que se dispone, pero que una vez reducida sus expresiones mediante sencillos cálculos

En la imagen se muestra que en f y g se tiene:

1. $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$=2 rectas paralelas.
2. Respecto a h y f la relación es:

-5×3+3×5=0 rectas perpendiculares

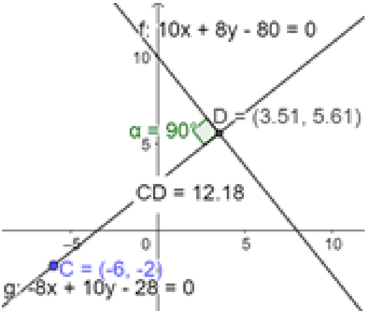


Figura 4.16

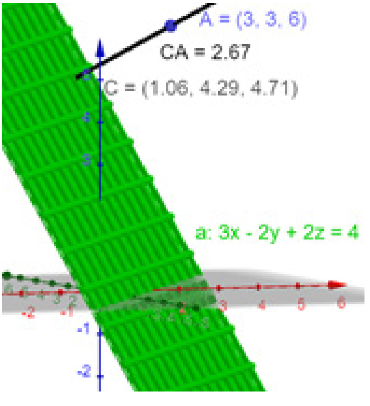


Figura 4. 17

Calculando manualmente la distancia dada en la figura anterior se tiene:

d(A(3,3,6),a)

algebraicos adoptan la siguiente forma general:

Ax+By+C=0 con A≠0 ∨B≠0 (1)

Es decir, A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero. Esta ecuación (1) se llama la forma general de la ecuación de una recta.

Las soluciones dadas al **Ejemplo 4.1** tanto en el cálculo manual como la solución con el GeoGebra se han presentado en la forma de la ecuación general.

En Figura 4.14 se muestra que la ecuación:

Ax+By+C=0 siempre representa una línea recta.

Posiciones relativas de rectas expresadas en la forma general.

Sean Ax+By+C=0 y A'x+B'y+C'=0 . Por lo expresado en nota de Figura 4.14 se tiene:

m=$-\frac{A}{B}$ $y\ m'=-\frac{A'}{B'}$ por lo que, a partir de lo mostrado en Figura 4.10, dos o más rectas son paralelas si sus pendientes toman igual valor, en este caso, la condición se reduce a: $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$ AB'=BA'. De aquí se infiere que dos rectas coinciden si AB'≠BA'. Por otro

$$= \frac{|3 \times 3 - 2 \times 3 + 2 \times 6 - 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{11}{4{,}123} = 2{,}667$$

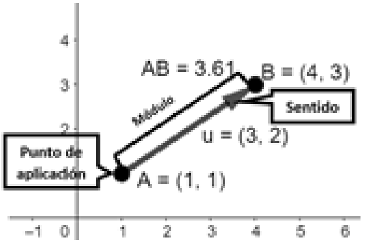


Figura 4. 18

$$\vec{u} = (3,2) = (4-1, 3-1)$$

Dado $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$;

$$\vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

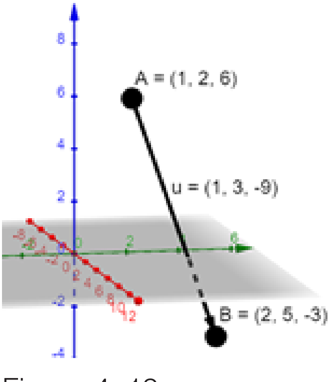


Figura 4. 19

lado, la condición de perpendicularidad se reduce a:

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1 \Rightarrow AA' + BB' = 0$$

(Figura 4.15).

Distancia de un punto a una recta.

En Figura 4.16 se muestra la distancia de un punto a una recta, se trata de la distancia mínima se ubica en la proyección ortogonal del punto C sobre la recta f, es decir, el punto D de la recta f tal que (CD) sea perpendicular a ella. Esta distancia se calcula mediante la fórmula

$$d(P(x_0, y_0), r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 4.2

Para el ejercicio resuelto con GeoGebra en Figura 4.16 el cálculo es:

$$d(C, f) = \frac{|10 \times (-6) + 8 \times (-2) - 80|}{\sqrt{10^2 + 8^2}} = \frac{156}{12{,}18} = 12{,}18$$

GeoGebra tiene el comando distancia, cuya sintaxis es:

Ditancia(<Punto>,

<Objeto (punto,recta,plano...)>

En epígrafe 4.2 se dijo que Una función lineal tiene la forma

$$f(x_1,...,x_n)=a_1 x_1+\cdots+a_n x_n+b$$

Para el caso del plano, como una

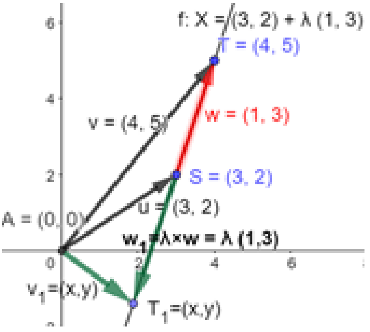


Figura 4. 20

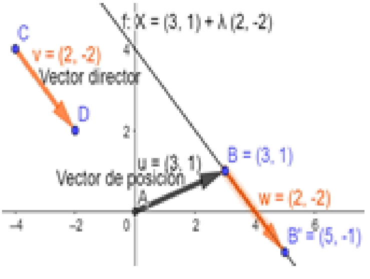


Figura 4.21

generalización de la recta se tiene que su ecuación es de la forma:

Ax+By+Cz+D=0 y por tanto puede medirse la distancia de un punto del espacio al plano mediante una fórmula análoga:

$$d(P(x_0, y_0, z_0), p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En Figura 4.17 se muestra el cálculo de una de esas distancias.

4.5. Ecuación vectorial de la línea recta

Definición:

Se llama **vector de dimensión n** a una tupla (lista ordenada, o secuencia ordenada de n elementos, siendo $n \in \mathbb{N}$) de n números reales llamados componentes del vector. El conjunto de todos los vectores de dimensión n se representa como $\mathbb{R}^n$.

Así, un vector $\vec{v}$ perteneciente a un espacio $\mathbb{R}^n$ se representa como: $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, donde $v \in \mathbb{R}^n$

Un vector también se puede ver desde el punto de vista de la geometría como vector geométrico (usando frecuentemente el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ (Figura 4.19) o bidimensional $\mathbb{R}^2$ (Figura 4.18).

Un vector fijo del plano euclídeo es un segmento orientado, en el que hay que distinguir tres características:

1. Módulo: la longitud del segmento.
2. Dirección: la dirección de la recta.
3. Sentido: la orientación del segmento, del origen al extremo del vector.

La ecuación vectorial de una recta viene dada por la expresión X= $\vec{v}$ + $\lambda\vec{w}$ (Figura 4.20), donde X representa un punto (x, y) cualquiera de la recta, al que se asocia $\vec{v}$, vector de posición, λ es un número real y $\vec{w}$ es el vector director de la recta, porque da a esta dirección y sentido; generalmente $\vec{w}$ es equipolente al vector director o sea, tienen el mismo módulo, dirección y sentido del vector director (Figura 4.21).

Para obtener la ecuación vectorial de la recta con GeoGebra no se requiere de procesamientos especiales, se procede según muestra la secuencia de Figura 4.22.

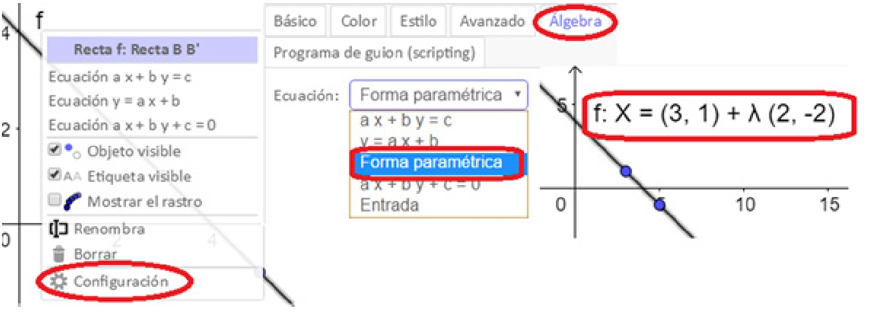


Figura 4. 22

4.6. Solución de ecuaciones lineales

Como ya se ha mostrado, las soluciones de ecuaciones no presentan dificultades utilizando los asistentes matemáticos, particularmente cuando se determinan los ceros de una función, pero el objetivo de este libro no es solo estudiar el comportamiento de las funciones utilizando asistentes matemáticos, también se incluye las soluciones de ecuaciones, y muy particularmente el estudio de sus fundamentos teóricos y de los algoritmos utilizados en la determinación de sus raíces; siguiendo esta idea, es necesario precisar conceptos generales que dan fundamento a la teoría de las ecuaciones.

Definición:

Igualdad: Toda expresión matemática separada con el signo igual (=).

34 –20 = 14 3x – 6 = 3

Definición:

Miembros de una igualdad: En toda igualdad se distinguen dos miembros:

Primer miembro: Todo lo que está delante del signo igual.

Segundo miembro: Todo lo que está detrás del signo igual.

$$\begin{array}{ccc} 3x + 5x - 6 & = & 2x + 18 \\ \textit{Primer miembro} & = & \textit{Segundo miembro} \end{array}$$

Definición:

Términos: Se designa con este nombre a los sumandos de cada miembro.

Definición:

Identidad: Igualdad algebraica (constantes, y variables) que se cumple para todos los valores admisibles (dominio). Ej.: 2 x + x = 3 x.

Definición:

Ecuación: Igualdad algebraica que sólo se cumple para algún o algunos valores admisibles (dominio). Ej.: 2 x = 6 solo se cumple para x = 3

Definición:

Grado de una ecuación: Mayor exponente al que está elevado la variable.

Ej.: $3x^2-1=95$ Ecuación de segundo grado

$3x-1=95$ Ecuación de primer grado.

$2x^4-3x^2+2x-8=0$ Ecuación de cuarto grado

Definición:

Solución de una ecuación: Valor numérico para el cual se cumple la igualdad. Resolver una ecuación es hallar el conjunto de sus soluciones.

Ej.: $2x - 3 = 7$ Solución $x = 5$; $S= \{5\}$

$4x = 6$, $S= \{1,5\}$

$6 – x = 5$, $S= \{1\}$

Definición:

Ecuaciones equivalentes: Dos o varias ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución: Ej.: $3x – 2 = 10$ y $2x = 8$. La importancia de este concepto radica en que los métodos para resolver ecuaciones consisten en transformar la ecuación original en otras más sencillas, pero de tal manera que siempre se obtengan ecuaciones equivalentes; es decir, ecuaciones que tengan el mismo conjunto solución. Esto es lo se quiere decir de ahora en adelante cuando de un método o regla se diga que permite obtener una ecuación equivalente. Posteriormente se trabajarán con métodos que permiten obtener ecuaciones cuyo conjunto solución contiene al de la ecuación original, pero nunca se debe aplicar métodos con el que se pierdan soluciones de la ecuación que se pretende resolver, a menos que esas soluciones no interesen para el estudio que se realiza.

Definición:

Regla de la suma: Si a ambos miembros de una ecuación se suma (resta) la misma expresión algebraica con valores admisibles en el dominio de definición de la ecuación, se obtiene una ecuación equivalente. En la práctica esto equivale a lo que en lenguaje popular se expresa diciendo que: “un término que aparece con signo positivo en un miembro de la ecuación se puede ‘pasar’ al otro miembro con signo negativo, y viceversa”.

Definición:

Regla del producto: Si ambos miembros de una ecuación se multiplican (dividen) por una misma expresión algebraica que tiene valores admisibles en el dominio de definición de la ecuación, se obtiene una ecuación equivalente. En la práctica esto equivale a lo que en lenguaje popular se expresa diciendo que: “Un término que aparece multiplicando en un miembro de la ecuación se puede ‘pasar’ al otro miembro dividiendo, y viceversa”.

Definición:

Despejar o aislar la incógnita: Proceso de transformación de una ecuación aplicando reglas que permitan encontrar nuevas ecuaciones equivalentes hasta dejarla la variable en uno de los dos miembros (preferiblemente en el primer miembro) y los valores numéricos o parámetros simplificados hasta su mínima expresión en el otro miembro (preferiblemente el segundo).

Algoritmo # 1 para resolver una ecuación:

1. Si la ecuación posee expresiones fraccionarias, determinar el mínimo común múltiplo de los denominados y multiplicar por el valor obtenido ambos miembros de la ecuación con el propósito de quitar los denominadores.
2. Si existen signo de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes), simplificar estas expresiones respetando las leyes de la matemática para estos casos.
3. Agrupar en un miembro las expresiones que contengan variables y en el otro las constantes o términos independientes; aplicando para ello las reglas de la suma y el producto antes enunciadas.
4. Reducir en cada miembro los términos semejantes (dejar sólo un término con parte literal y un solo término con parte numérica).
5. Despejar la incógnita para averiguar su valor.

Ejemplso 4.3

Encontrar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{3x-2}{4}+\frac{2(5-3x)}{6}=2x-\frac{x-7}{3}$$

Paso 1: Hallar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores: mcm(4,6,3)=12. Multiplicando por 12 ambos miembros de la ecuación se tienen:

$$3(3x-2)+4(5-3x)=24x-4(x-7)$$

Paso 2. $9x-6+20-12x=24x-4x+28$

Paso 3. $9x-12x-24x+4x=28+6-20$

Paso 4. $-23x=14$

Paso 5. $x=-\frac{14}{23}$ $\quad S=\left\{-\frac{14}{23}\right\}$

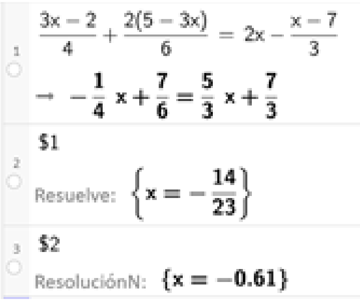


Figura 4.23

Se dan dos soluciones, una con el comando "Resuelve", el cual devuelve un valor en notación fraccionaria y otra con "ResoluciónN" que da un valor decimal.

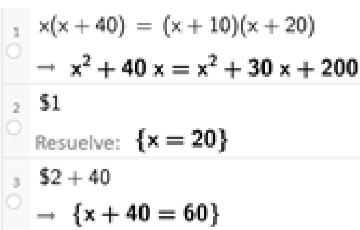


Figura 4.24

En la figura se muestra la solución del ejemplo 4 .4, empleando el GeoGebra, como puede observarse, su solución es inmediata, pero lo más importante ha

En Figura 4.23 se muestra la solución del Ejemplo 4.3 utilizando la opción CAS del GeoGebra.

Ejemplo 4. 4

Las ecuaciones permiten modelar la solución de problemas:

Un terreno rectangular tiene 40 metros (m) más de largo que de ancho. Si tuviera 20 m menos de largo y 10 m más de ancho su área sería la misma. Calcular sus dimensiones.

Proceso de modelación		
	Demisiones actuales	Dimensiones modificadas
Ancho	x	x+10
Largo	x+40	x+20
Área	x(x+40)	(x+10)(x+20)

Como en ambos casos el terreno tiene la misma área resulta:

$x(x+40)=(x+10)(x+20)$

$x^2+40x=x^2+30x+200 \Longrightarrow 10x=200 \Rightarrow$

$x=20$ m (ancho) y $x+40=60$ m (largo)

4.7. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Definición:

Un sistema de ecuaciones algebraicas es un conjunto de dos o más ecuaciones con más de una incógnita que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas sido la determinación de la ecuación que modela el problema propuesto.

Un modelo matemático de un objeto (fenómeno real) es cualquier esquema simplificado e idealizado del mismo, constituido por símbolos y operaciones (relaciones) matemáticas; pero ese proceso de modelación no lo puede ser reali-zado por la computadora, para ello se necesita la inteligencia y creatividad humana.

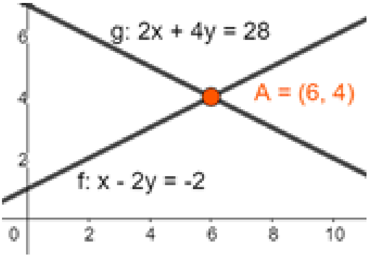


Figura 4.25

Solución gráfica con Geo-Gebra del sistema de ecua-ciones modelado como solución en ejemplo 4.5

que satisfacen dichas operaciones. El tema se introducirá mediante un sencillo problema muy conocido.

Ejemplo 4.5

En un corral hay gallinas y conejos. Si hubiera dos gallinas más, el número de estas igualaría al doble el número de conejos. En total hay 28 patas. ¿Cuántas son las gallinas y cuántos los conejos?

Proceso de modelación		
	Número de gallinas	Número de conejos
En el corral hay	x	y
Se igualarían si:	x+2	2y
Hay un total de 28 patas	2x	4y

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2=2y \\ 2x+4y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-2 \ (1) \\ 2x+4y=28 \ (2) \end{cases}$$

Definición:

Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.

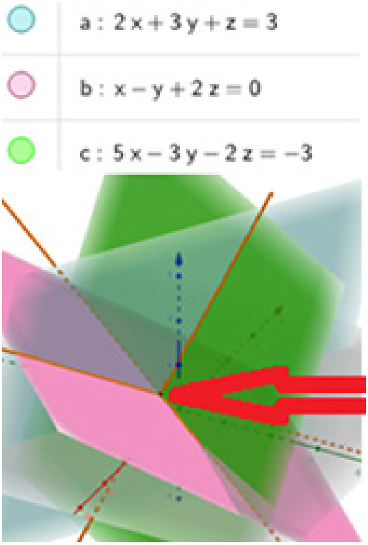


Figura 4.26

La gráfica del sistema presenta 3 planos interceptados en 3 rectas que se cortan en un punto. Las coordenadas de este punto se calculan por medio de los comandos “Resuelve” o “SolucionesN”

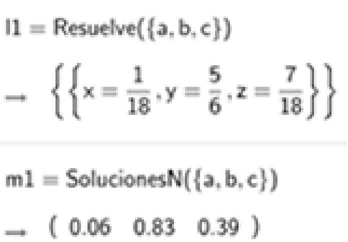


Figura 4.27

TEOREMA:

Si en un sistema se reemplaza una de sus ecuaciones por la que resulta de sustituir en ella una de sus incógnitas por la expresión de esta incógnita despejada en la otra ecuación, se obtiene un sistema equivalente.

Algoritmo # 2 para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

   Para Ejemplo 4.5 se tiene: x=2y-2
2. Se sustituye la expresión hallada de la incógnita de la otra ecuación, obteniéndose: $2(2y-2)+4y=28$ (3)
3. Se resuelve la ecuación (3): $4y-4+4y=28 \Rightarrow 8y=32 \Rightarrow y=4$
4. Se sustituye la solución de la ecuación (3) en una de las ecuaciones:

   $2x+4(4)=28 \Rightarrow 2x=28-16 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$
5. Se presenta la solución final: Solución x=6 ; y=4

TEOREMA:

Si en un sistema se sustituye una de sus ecuaciones por la que resulta de multiplicarla por un factor no nulo y sumarla miembro a miembro con la otra ecuación previamente multiplicada por un factor cualquiera, se obtiene un sistema equivalente.

Algoritmo # 3 para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción.

1. Se multiplican los dos miembros de cada una de las ecuaciones por sendos factores no nulos de modo que las ecuaciones que se obtienen tengan opuestos los coeficientes de una misma incógnita.

Para Ejemplo 4.5 se tiene: $\begin{cases} x - 2y = -2 \ (1) \\ 2x + 4y = 28 \ (2) \end{cases}$

Multiplicar la ecuación (1) por -2 para obtener el opuesto de 2x

$$\begin{cases} -2x + 4y = 4 \ (1) \\ 2x + 4y = 28 \ (2) \end{cases}$$

2. Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones obteniéndose:

$$8y=32 \ (3)$$

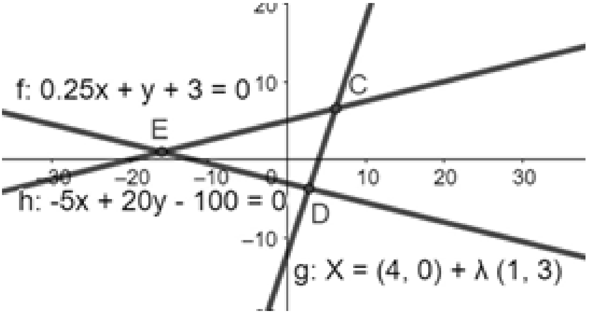
3. Resolver ecuación (3): $8y=32 \Rightarrow y=4$
4. Se sustituye en una de las ecuaciones del sistema la incógnita anteriormente despejada y se resuelve la nueva ecuación:

   Si se hace y=4 en (1) se tiene $x-2(4)=-2 \Rightarrow x=8-2 \Rightarrow x=6$
5. Se presenta la solución final: Solución x=6 ; y=4

Ejercicios y problemas propuestos:

IV. 1. El problema tiene como referencia el siguiente gráfico:

En la figura se muestra el gráfico de las funciones lineales



f: $0.25x+y+3=0$

g: $X=(4,0)+\lambda(1,3)$

h: $-5x+20y-100=0$

También se muestran los puntos de intersección de estas funciones: C, D, E

a) Escriba la ecuación simétrica de cada una de las rectas.

b) Determine los valores del dominio de cada una de las funciones donde las mismas toma valores negativos.

c) Halle las coordenadas de los puntos C, D utilizado el GeoGebra y las del punto E mediante cálculo manual.

d) Halle manualmente la ecuación cartesiana y vectorial de la recta que pasa por C y es paralela a la recta f.

e) Halle empleando el GeoGebra la ecuación cartesiana y vectorial de la recta que pasa por D y es perpendicular a la recta h.

f) Halle por cualquier vía, manual o mediante el GeoGebra la distancia del punto E a la recta g.

g) De la función:

$$k(x) = \begin{cases} f(x), si\ x \leq -16 \\ h(x), si - 16 < x \leq 6.18 \\ g(x), si\ x > 6.16 \end{cases}$$

Halla: Gráfico. Dominio. Imagen. Monotonía

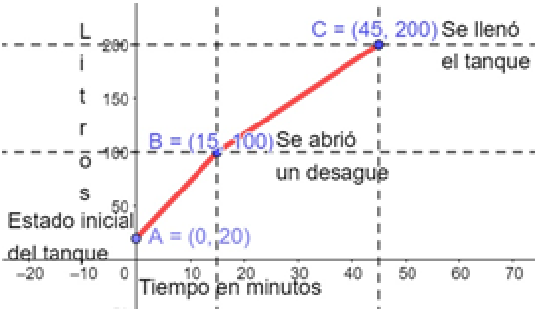
IV. 2. Una agencia de alquiler de coches cobra por un determinado modelo $0.00 al realizar el contrato y $0,50 por cada km recorrido. En otra agencia cobran $30.00 al contratar y $0,30 por km recorrido. Analiza, en función de los km recorridos cuál es la agencia más ventajosa.

IV. 3. Desde su casa hasta la parada del autobús, María tarda 5 minutos (la parada está a 200 m de su casa); espera durante 10 minutos, y al ver que el autobús tarda más de lo normal, decide ir andando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar andando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que el teléfono móvil se le ha olvidado en casa y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar. Representa la gráfica tiempo-distancia a su casa.

IV. 4. Al dividir un número de dos cifras por el triple de las cifras de las unidades se obtiene 7 por cociente y 10 por resto. Decir cuál es el número si se sabe que la diferencia entre el triple de la cifra de las decenas y el doble de las unidades es 19.

IV. 5. En la figura se muestra un esquema del llenado de un tanque.

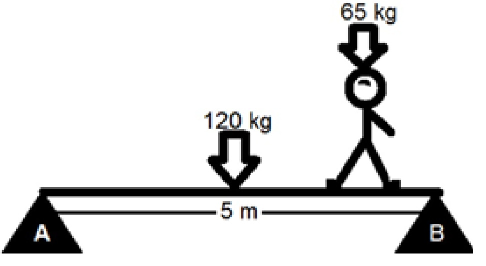
Construya la función a trozos que describa el proceso seguido en el llenado del tanque.



IV. 6. Una persona anda en una viga horizontal, que se halla sobre los apoyos A y B. La presión que soporta el apoyo B varía en dependencia de la posición de la persona. Halle la ecuación de dependencia de esta presión respecto a la distancia a que se halla la persona del otro apoyo A, dándose los siguientes datos: peso de la viga P=120 kg, longitud de la misma l= 5 m, peso de la persona p=65 kg.

Una vez obtenida la ecuación general, evalúela en los datos que le damos y grafíquela con el GeoGebra.

Haga una tabla donde se muestre la variación de la presión cada vez que la persona avanza 25 cm sobre la barra.



Robert Recorde (1510-1558) médico y matemático galés que utilizó por primera vez el signo igual (=).

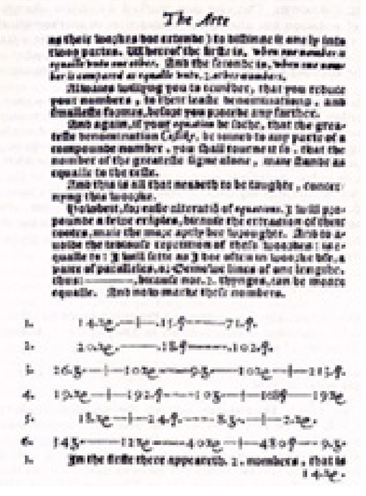
Observe que:

El peso de la viga *P* se distribuye uniformemente en los dos apoyos; el peso de la persona p se distribuye en los apoyos en razón inversamente proporcional a la distancia hasta estos apoyos.

4.8. Pinceladas históricas

Conner (2009), plantea que “la producción del conocimiento científico es una actividad social colectiva realizada por gente trabajadora ocupada

Estudió matemática en Oxford y medicina en Cambridge. Enseñó matemáticas y ejerció de médico del rey Eduardo VI y la Reina María. Un rival político lo demandó por difamación, fue arrestado por deudas y murió en prisión en 1558.



The Arte

Facsímil de la obra "The Wheatstone of Witte, …," ("La piedra de afilar de Witte, que es la segunda parte de la aritmética que contiene la extracción de las raíces, la práctica cosista, con la regla de la ecuación, y los trabajos de números irracionales"), donde Robert Recorde utiliza por primera vez el signo igual, fue el primer libro en inglés que usó los signos más y menos.

en ganarse el pan de cada día". Los autores comparten este criterio y cada vez que sea posible se tratarán temas de historia de la ciencia y el origen del signo igual es uno de ellos.

Se adjudica al galés Robert Recorde la invención del signo igual. En 1557 Recorde escribió en su libro The Whetstone of Witte: "Para evitar la tediosa repetición de las palabras es igual a, estableceré como normalmente hago en las hojas de trabajo un par de paralelas, o líneas gemelas de la misma longitud, esto es: porque no hay nada que pueda ser más igual que dos líneas".

Pero el símbolo "=" no se usó de inmediato, símbolos como [, ||, | ,∐▒,)=(,_ʌ_, y æ, se utilizaron por mucho tiempo, siendo su mayor rival; este símbolo fue utilizado por Rene Descartes, era parecido al del infinito pero abierto por la izquierda; de igual modo un signo simétrico a éste, fue utilizado por Francisco Vieta.

Hacia 1631 el signo de Recorde fue empleado en tres trabajos de gran influencia: "Artis analyticae praxis" de Thomas Harriot, "Clavis mathematicae" de William Oughtred y "Trigonometría" de Richard Norwood (Cajori, 1993). Posteriormente John Wallis, Isaac Barrow, e Isaac Newton, lo utilizaron facilitando su adopción en Europa. A principios del siglo XVI, la rivalidad con otros signos cesó, y a finales del siglo XVII se produjo la adopción casi universal de este signo al ser utilizado por Leibniz (1646–1716) en su notación para el Cálculo Diferencial

CAPÍTULO V.

LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

"La ecuación de segundo grado aparece resuelta en los Elementos de Euclides, por supuesto bajo disfraz geométrico, mediante problemas de origen pitagórico y de reminiscencias babilonias, llamados de "aplicación de áreas", cuyos tres tipos: aplicación simple (parábola), aplicación por defecto (elipse) y aplicación por exceso (hipérbola), legaron su nombre a los tres tipos de cónicas".

(Babini, 1979)

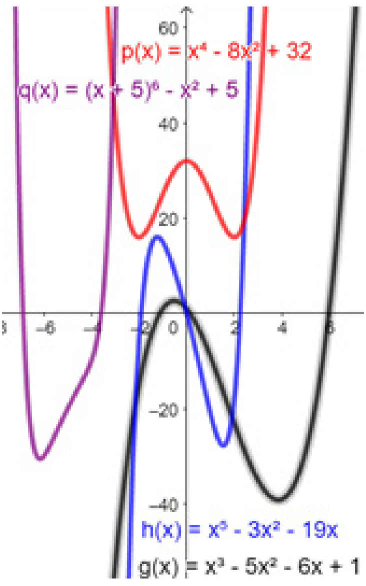


Figura 5.1

PINCELADAS HISTRICAS

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas

5.1. Funciones cuadráticas

En capítulos anteriores se han estudiado o al menos presentado las siguientes funciones:

- » Función constante: $f(x)=c$
- » Función idéntica: $f(x)=x$
- » Función lineal: $f(x)=mx+n$
- » Función $f(x)=x^2$
- » Función $f(x)=x^3$

Además, al realizar operaciones entre funciones se han estudiado funciones como $f(x)=x^3-8x+7$.

Todas estas funciones son casos particulares de las funciones polinómicas definidas del siguiente modo:

Definición:

Polinomio: Se designa polinomio de grado $n \in N$ en una variable a una suma finita de potencias de x multiplicadas por coeficientes reales, de la forma:

utilizando abre-viaturas; sin embargo, en la Edad Media, los matemáti-cos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos.

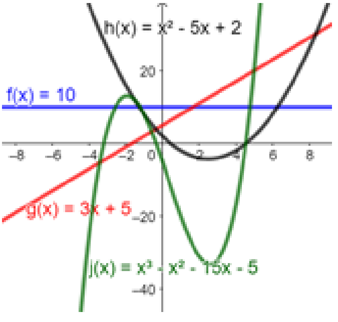


Figura 5.2

Figura 5. 3

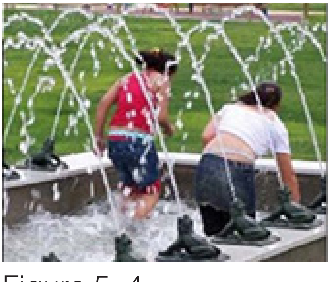


Figura 5. 4

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 0; n, a_n \neq 0$$

Definición:

Una función polinómica es una relación que asigna, para cada valor de la variable x, el valor que le corresponde si se la reemplaza en el polinomio que define su fórmula, es decir:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f: x \longrightarrow P(x)$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

1. Con n=0; se denominan funciones constantes:

$f(x)=a_0$

2. Con n=1; se denominan funciones lineales:

$f(x)=a_1 x+a_0$

3. Con n=2; se denominan funciones cuadráticas:

$f(x)=a_2 x^2+a_1 x+a_0$

4. Con n=3; se denominan funciones cúbicas:

$f(x)=a_3 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0$

Definición:

Una función cuadrática es un caso particular de función polinómica que usualmente se denota por:

$f(x)=ax^2+bx+c, con\ a\neq 0, a,b,c\in R$

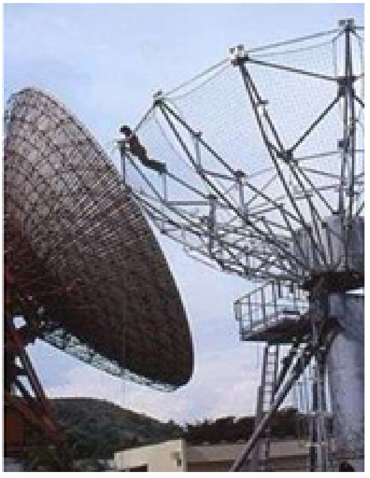


Figura 5. 5

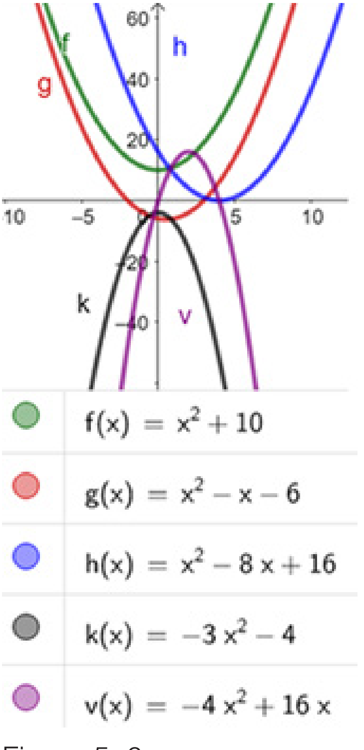


Figura 5. 6

5.2. Casos particulares de la función cuadrática

$$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+: f_1(x) = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Características de la función:

Dominio f_1	$\mathbb{R}$	Imagen f_1	$\mathbb{R}_+$
Extremos globales		Mínimo (vértice) en V(0,0)	
Ceros		x=0,punto(0,0)	
Intersección con eje Y		punto(0,0)	
Signos		Positivo ∀x∈$\mathbb{R}$	
f_1 no es inyectiva		f_1 no es sobreyectiva	
f_1 es decreciente en (-∞,0)y creciente en(0,+∞)			
f_1 es par		f_1 no es impar	
f_1 no es aditiva		f_1 es multiplicativa	
f_1 es simétrica respecto a x=0			
f_1 tiene puntos fijos en x=0 y x=1.			

5.3. Propiedades de la función cuadrática

1. El gráfico es una parábola.
2. La gráfica intercepta al eje Y en el punto (0, c)
3. Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, la gráfica intercepta al eje X en puntos con abscisas

   $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
4. El vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

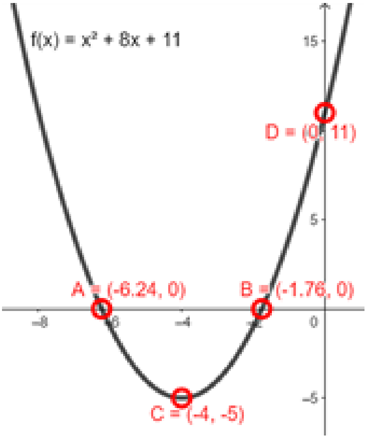


Figura 5. 7

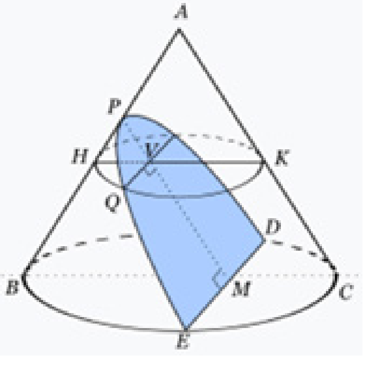


Figura 5. 8

La parábola como sección cónica.

5. La recta vertical $x=-\frac{b}{2a}$ es el eje de simetría de su gráfico.
6. Si a>0 la parábola se abre hacia arriba, y si a<0 se abre hacia abajo.

En Figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se muestra la presencia y aplicación de la parábola y la función cuadrática en la vida y en Figura 5. 6 se muestran ejemplos que se corresponden con las propiedades dadas en 5.3

En Figura 5. 7 se muestran los puntos más significativos de la función cuadrática que se pueden obtener directamente activando la opción "PUNTOS ESPECIALES" que ofrece GeoGebra. Estos resultados se corresponden con las propiedades antes descritas.

Ejemplo 5.1:

Constate los resultados de la Figura 5. 7 aplicando las propiedades dadas en 5.3 para $f(x)=x^2+8x+11$

» Intercepto con eje Y en el punto P (0, c); D= (0,11).

a) $\Delta=8^2-4\times 11=20>0$:

$$x_1=\frac{-8+\sqrt{20}}{2}=-1.76;\ x_2=\frac{-8-\sqrt{20}}{2}=-6.24$$

Vértice: V

$$\left(-\frac{8}{2}=-4,(-4)^2+8\times(-4)+11=-5\right)$$

En capítulo III se estudió la traslación horizontal y vertical de una curva, ahora esos algoritmos se aplicarán para mostrar que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ (función cuadrática) resulta de traslaciones de la función $f_1(x)=x^2$ que se ha estudiado detalladamente.

Para lograr este propósito se necesita expresar la función f(x)=ax²+bx+c en la forma f_1 (x±|h|)±|k| para lograrlo es necesario hacer un completamiento cuadrático en la función f(x)=ax²+bx+c,con a≠0,a,b,c∈ℝ

1. $f(x) = ax^2 + bx + c, con\ a \neq 0 \Rightarrow$
2. $\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right), con\ a \neq 0 \Longrightarrow$
3. $\Longrightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right), con\ a \neq 0 \Rightarrow$
4. $\Longrightarrow f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right), con\ a \neq 0$
5. $\Longrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, con\ a \neq 0$

Observe que el numerador de la última fracción es Δ=b²-4ac por lo que:

6. $\Longrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, con\ a \neq 0$

De (6) se puede concluir que: $f(x) = af_1\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}$, lo cual era el propósito inicial, para concluir que el gráfico de la función f(x) es el mismo de la función f_1 (x) pero:

a) Trasladada $\left|\frac{\Delta}{4a}\right|$ unidades hacia arriba si $-\frac{\Delta}{4a}$>0 o hacia abajo si $-\frac{\Delta}{4a}$<0.
b) Trasladada $\left|\frac{b}{2a}\right|$ unidades hacia la derecha si $\left|\frac{b}{2a}\right|$<0 o hacia la izquierda si $\left|\frac{b}{2a}\right|$>0
c) Dilatada, si |a|>1 o contraída, si 0<|a|<1.
d) La parábola se abre hacia arriba si a>0 o hacia abaio si a<0.
e) El vértice de la parábola se desplaza hacia $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
f) Los ceros se pueden deducir de (4):

De $f(x) = 0$ se tiene que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con b^2-4ac≥0

A partir de este análisis es posible realizar un resumen similar al que se hizo de la función f_1 (x)=x^2

Características de la función: f(x)=ax^2+bx+c

Dominio f	$\mathbb{R}$
Imagen f	$Si\ a > 0\ \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ $Si\ a < 0\ \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$
Extremos globales (Vértice V)	Si a>0 f tiene un mínimo V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ Si a<0 f tiene un máximo V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Ceros	$\begin{cases} Si\ \Delta < 0, f\ no\ tiene\ ceros\ reales \\ Si\ \Delta = 0\ un\ único\ cero: x = -\dfrac{b}{2a} \\ Si\ \Delta > 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \end{cases}$
Intersección con eje Y	punto(0,c)
Signos	$\begin{cases} Si\ \Delta < 0 \begin{cases} Si\ a > 0, posivita\ \forall x \in \mathbb{R} \\ Si\ a < 0, negativa\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ Si\ \Delta = 0 \begin{cases} Si\ a > 0, posivita\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\} \\ Si\ a < 0, negativa\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\} \end{cases} \\ Si\ \Delta > 0 \begin{cases} Si\ a > 0\ resolver\ (x-x_1)(x-x_2) > 0 \\ Si\ a < 0\ resolver\ (x-x_1)(x-x_2) < 0 \end{cases} \end{cases}$
f no es inyectiva	f no es sobreyectiva
Monotonía de f $\begin{cases} Si\ a > 0 \begin{cases} Estrictamente\ creciente\ en\ \left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right[\\ Estrictamente\ decreciente\ en\ \left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right] \end{cases} \\ Si\ a > 0 \begin{cases} Estrictamente\ creciente\ en\ \left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right] \\ Estrictamente\ decreciente\ en\ \left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right[\end{cases} \end{cases}$	

f es par si es de la forma	f no es impar
$f(x)=ax^2+c$	
f no es aditiva	f es multiplicativa si es de la forma $f(x)=x^2$
f es simétrica respecto a $x=-\frac{b}{2a}$	
$\begin{cases} x=\frac{1-b}{2a};\, si\ (b-1)^2-4ac=0,\, con\ a\neq 0 \\ x_1=\frac{1-b+\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}\ y\ x_2=\frac{1-b-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a};\, si\ (b-1)^2-4ac>0 \end{cases}$	

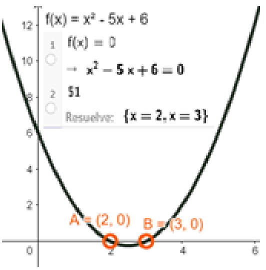


Figura 5. 9

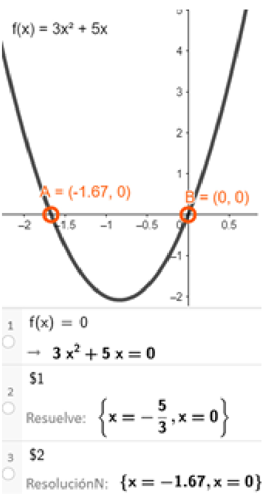


Figura 5. 10

5.4. La ecuación cuadrática con soluciones reales

Los ceros de la función cuadrática definidos por:

$f(x)=0 \Rightarrow ax^2+bx+c=0, con\ a\neq 0, a,b,c \in R$

Conduce a la necesidad de resolver una ecuación cuadrática con una incógnita.

En la práctica esta ecuación puede presentarse completa: ax^2+bx+c=0,con a≠0,b≠0,c≠0 o incompleta con algunas de las variantes:

1. $ax^2+bx=0$
2. $ax^2+c=0$
3. $ax^2=0$

La fórmula $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta=b^2-4ac$ permite resolver cualquier ecuación cuadrática, pero cada caso presenta particulares que simplifican el cálculo:

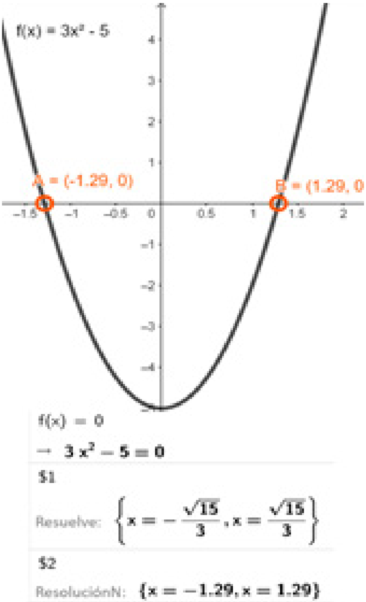


Figura 5. 11

Figura 5. 12

$$ax^2 + bx = 0 \Longrightarrow x(ax + b) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + c = 0 \Longrightarrow ax^2 = -c \Longrightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$ax^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$$

Ejemplo 5.2:

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0;\ \Delta = b^2 - 4ac; x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3; x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2; S = \{3,2\}$$

2. $3x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = -\frac{5}{3}$

3. $3x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} \vee x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

Relación entre los coeficientes de la ecuación cuadrática y sus raíces.

1. En cuanto a la suma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

2. En cuanto al producto:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$
$$= \frac{c}{a}$$

Las relaciones anteriores se expresan en:

TEOREMA DE VIÈTE

El producto de las raíces x_1,x_2 de la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ es

François Viète (1540-1603) magistrado y hombre de confianza del rey Enrique IV de Francia. Aficionado a la Matemáticas; sus aportes al Algebra hace que se considere el padre del álgebra moderna, pues fue el primero en utilizar letras para simbolizar las incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas.

Usando el sistema de Arquímedes obtuvo un valor de Pi sin error en sus diez primeros decimales, una hazaña en su época. Agregó las fórmulas que expresan el seno y el coseno del múltiplo de un arco en función del seno y del coseno del arco, y recíprocamente, la división de un arco en 3, 5 y 7 partes.

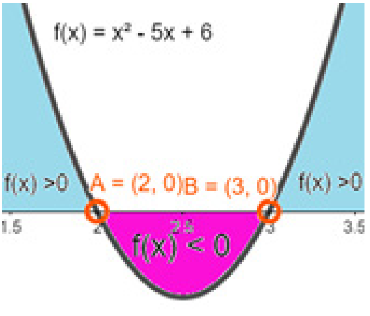


Figura 5. 13

numéricamente igual al término independiente de la ecuación y su suma es el opuesto del segundo término de la ecuación.

Observe que:

En la ecuación $x^2-5x+6=0$ del ejemplo 5.2 las soluciones $S=\{3,2\}$ cumplen la condición del teorema de Viète: $3\times 2=6$ (término independiente) y $-(3+2)=-5$ (opuesto del segundo término).

Esta propiedad permite construir ecuaciones cuadráticas. Ejemplo: Construir una ecuación cuyas soluciones sean $x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{3}{4}$; $x_1\times x_2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$x_1+x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$; la ecuación deseada es:

$x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}=0 \Leftrightarrow 8x^2-10x+3=0$

5.5. Inecuaciones cuadráticas

Definición:

Una inecuación es una desigualdad que contiene incógnitas.

Definición:

Resolver una inecuación es encontrar el intervalo de números reales para el cual la inecuación se transforma en una desigualdad verdadera y para resolverlas se debe aplicar las propiedades de las desigualdades.

i. $a>b \Rightarrow a\pm c>b\pm c$

ii. $a>b \Rightarrow a.c>b.c\ ,\forall c>0$

iii. $a>b \Rightarrow a.c<b.c\ ,\forall c<0$

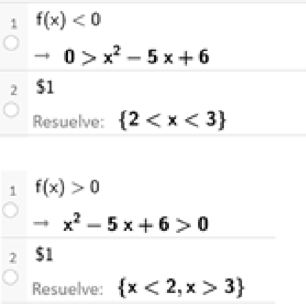


Figura 5. 14

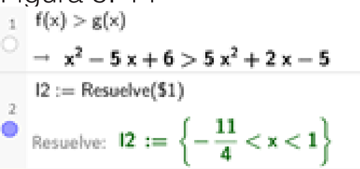


Figura 5. 15

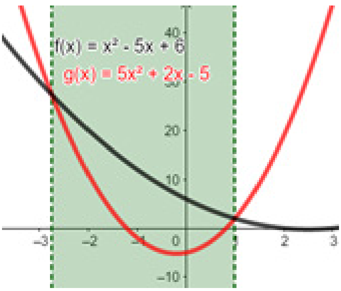


Figura 5. 16

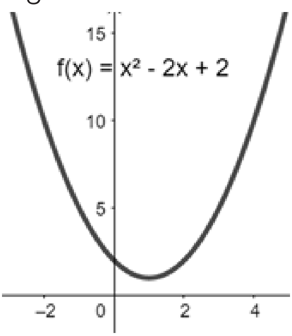


Figura 5. 17

Definición:

Si la expresión algebraica que define la inecuación es un polinomio de segundo grado, decimos que se trata de una inecuación cuadrática.

Las soluciones de las inecuaciones cuadráticas están íntimamente relacionadas con las soluciones de las ecuaciones de segundo grado (Figura 5. 13).

Esquema de solución de una inecuación cuadrática:

Algoritmo # 1

	$ax^2+bx+c>0$	
	a>0	a<0
$\Delta>0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x_2<x<x_1$
$\Delta=0$	Todo x tal que $x \neq x_1 = x_2$	No solución
$\Delta<0$	Cualquier valor de x	No solución
	a>0	a<0
	$ax^2+bx+c<0$	

GeoGebra es posibilita resolver inecuaciones típicas (Figura 5. 14) o más complejas (Figuras 5.15 y 5.16).

$$x^2-5x+6>5x^2+2x-5 \Rightarrow -4x^2-7x+11$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{225}}{-8}=\frac{7\pm 15}{-8}\begin{cases}\frac{22}{-8}=-\frac{11}{4}\\ \frac{-8}{-8}=1\end{cases}\Rightarrow -\frac{11}{4}<x<1$$

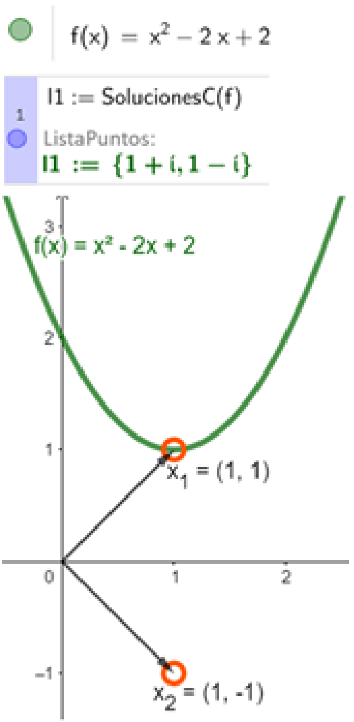


Figura 5. 18

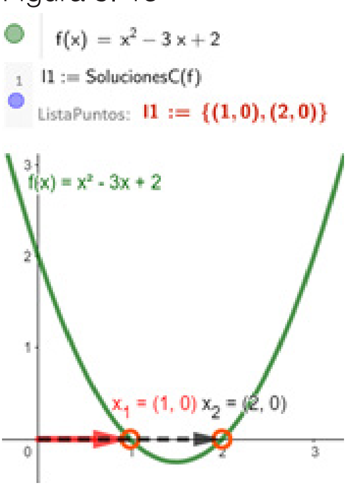


Figura 5. 19

5.6. La ecuación cuadrática con soluciones complejas

Ante el problema de determinar las raíces de la ecuación x^2-2x+2=0, el algoritmo indica calcular:

$\Delta=b^2-4ac;\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4$

Por ser Δ<0 la ecuación “no tiene solución”, además, la Figura 5. 17, muestra que la curva no corta el eje de abscisa; este problema se resuelve ampliando el campo numérico, con los llamados números complejos (C). En C es posible realizar operaciones que no se permiten en R, tal es la raíz par de números negativos.

A continuación, se expondrá cómo resolver en C ecuaciones cuadráticas con Δ<0.

En Figura 5. 18 se muestra las soluciones de la ecuación x^2-2x+2=0 con el comando “solucionesC”, de GeoGebra; estas son: x_1=1+i; x_2=1-i , pero si se hubiera seguido la solución iniciada al inicio del epígrafe se hubiera llegado a las siguientes situaciones:

$$x_1=\frac{2+\sqrt{-4}}{2}=\frac{2+\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\frac{2+2\sqrt{-1}}{2}$$
$$=\frac{2\left(1+\sqrt{-1}\right)}{2}=1+\sqrt{-1}=1+i$$

De expresado se puede inferir que:

a) En $\mathbb{C}$, $\sqrt{-1}$ =i

b) En $\mathbb{C}$,1+i es una forma de expresar el par ordenado (1,1).

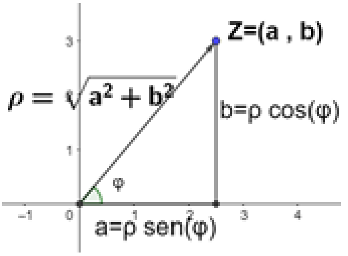


Figura 5. 20

z=(a,b)=a+bi

Sustituyendo expresiones trigonométricas en la expresión binómica se tiene:

z=ρ cos(φ)+isen(φ)

Abreviadamente

z=ρ cis(φ)

GeoGebra posee el comando “Apolar” que permite calcular los parámetros *ρ y φ* a partir de la forma de par o binómica del número complejo.

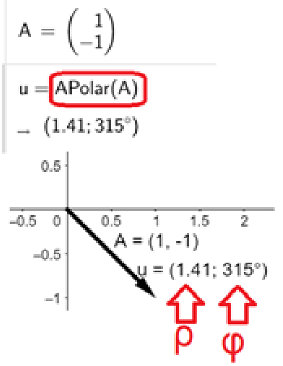


Figura 5. 21

c) Las soluciones de la ecuación son ahora puntos del plano

En Figura 5. 19 se muestra la solución en $\mathbb{C}$ de una ecuación que tiene en $\mathbb{R}$ $x_1=1;x_2=2$ pero expresadas en $\mathbb{C}$ como $x_1=(1,0)$; $x_2=(2,0)$.

Definición:

Un número complejo z es un par ordenado (a,b) donde a y b son números reales. El número

z=(a,b) se puede representar como z=a+bi siendo $i^2=-1$ y se dice que “a” es la parte real del número complejo y “b” la parte imaginaria,

Operaciones en $\mathbb{C}$

	Forma ...		
Operaciones	De Par	Binómica	Trigonométrica
Definición	(c,b)	$a+bi$	$\rho cis\ (\varphi)$
Suma	$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$		
Producto	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di})=(\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd})+(\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc})\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{\rho cis}\ (\boldsymbol{\varphi}))\times(\boldsymbol{\rho' cis}\ (\boldsymbol{\varphi'}))=\boldsymbol{\rho\rho' cis}(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi'})$		
Cociente	$\dfrac{\boldsymbol{\rho cis}\ (\boldsymbol{\varphi})}{\boldsymbol{\rho' cis}\ (\boldsymbol{\varphi'})}=\dfrac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho'}}\ cis\ (\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi'})$		
Potencia	$(\boldsymbol{\rho cis}\ (\boldsymbol{\varphi}))^n=\rho^n cis(n\varphi)$		
Raíz	$\sqrt[n]{\boldsymbol{\rho cis}\ (\boldsymbol{\varphi})}=$ $\sqrt[n]{\rho}\ cis\left(\dfrac{\boldsymbol{\varphi}}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right), k=0\ldots(n-1)$		

En Figura 5. 21 aparecen las cuatro raíces de la ecuación $x^4-1=0$ lo que equivale a calcular las cuatro raíces de $\sqrt[4]{1}$, observe que tiene dos raíces reales:

{-1,1} y dos raíces imaginarias {-i, i}; las dos primeras están sobre el eje de

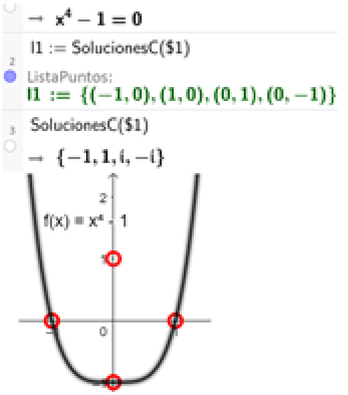


Figura 5. 22

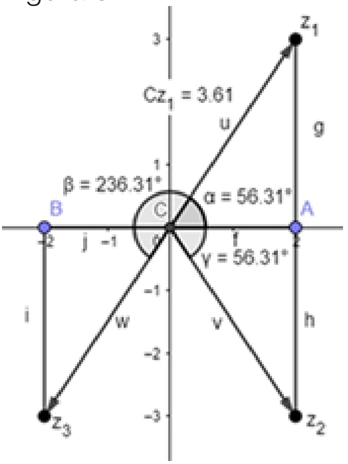


Figura 5. 23

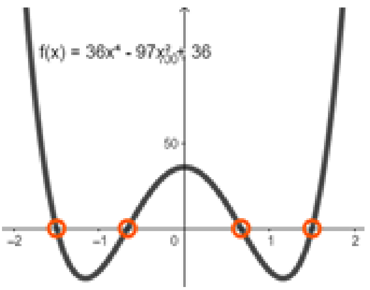


Figura 5.24

abscisas y las segundas sobre el de las ordenadas.

Definición:

Se dice que z_1 y z_2 son números complejos conjugados si $z_1=(a,b)$ y $z_2=(a,-b)$. Las raíces complejas de una ecuación son conjugadas.

Definición:

Se dice que z_1 y z_2 son números complejos opuestos si $z_1=(a,b)$ y $z_2=(-a,-b)$.

En Figura 5. 23 se muestran el opuesto y el conjugado de z_1.

5.7. Ecuaciones bicuadráticas

Definición:

Se llama bicuadrática e una ecuación de la forma

$ax^4+bx^2+c=0$.

Ellas pertenecen a un conjunto de casos particulares de ecuaciones que pueden resolverse mediante transformaciones convenientes, en este caso el más aconsejable es hacer un cambio de variable $z=x^2$.

Ejemplo 5.3:

Hallar las soluciones de la ecuación

$36x^4-97x^2+36=0$.

Como puede observarse en Figura 5. 24 la ecuación tiene cuatro soluciones reales.

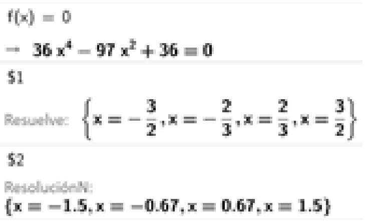


Figura 5.25

PINCELADAS HISTÓRICAS

El primer gran problema en la solución de ecuaciones debió surgir con la solución la ecuación $x^2-2=0$ en la época de los pitagóricos, porque no se conocía la existencia del número √2.

En el Renacimiento surgió otro problema al resolver la ecuación $x^2+1=0$ que requería hallar un número real cuyo cuadrado sea -1, se superó con la adopción de números imaginarios y la definición de la unidad imaginaria i que cumple $i^2=-1$.

haciendo $z=x^2$ la ecuación original se transforma $36z^2-97z+36=0$.

$\Delta=(-97)^2-4(36)(36)=4225$

$$z_{1,2}=\frac{97\pm\sqrt{4225}}{72}=\frac{97\pm 65}{72}$$

$$=\begin{cases} z_1=\dfrac{9}{4}\Rightarrow x^2=\dfrac{9}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ z_2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow x^2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\begin{cases}x_3=\dfrac{2}{3}\\ x_4=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$$

S={3/2,-3/2,2/3,-2/3}

En Figura 5. 25 están las soluciones con Geo-Gebra

Ejemplo 5.4:

Hallar las soluciones de la ecuación

$x^4-30x^2+225=0$.

La expresión algebraica de esta ecuación es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse por

$$(x^2-15)^2=0\Rightarrow x^2=15\Rightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{15}\\ x_2=-\sqrt{15}\end{cases}$$

La ecuación en cuestión tiene dos “ceros dobles”, recuerde que una ecuación algebraica de “grado n” tiene n raíces reales o complejas. El gráfico (Figura 5. 26) constata el comportamiento de la ecuación.

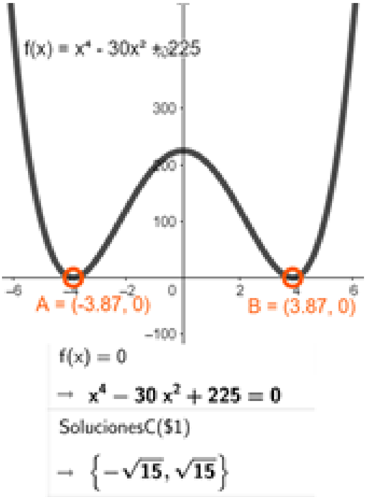


Figura 5. 26

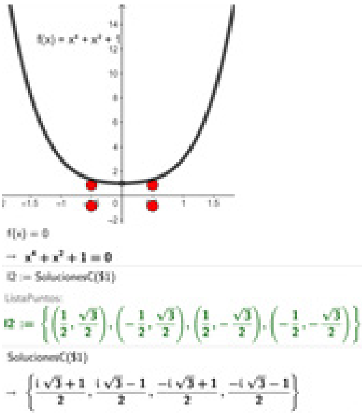


Figura 5. 27

Los cuatro puntos rojos son las cuatro raíces complejas de la ecuación.

Ejemplo 5.5:

Hallar las soluciones de la ecuación $x^4+x^2+1=0$.

$\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$

El valor del discriminante indica que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Siguiendo el proceso anterior se tiene:

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$=\begin{cases} z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}}\\ x_2=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}}\end{cases}\\ z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_3=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}\\ x_4=-\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}}\end{cases}\end{cases}$$

En Figura 5. 27 aparecen las soluciones de la ecuación empleando el GeoGebra, APARENTEMENTE no coinciden con las dada en el procesamiento manual, pero se puede comprobar que son equivalentes como se ilustra en Figura 5. 28.

5.8. Ecuaciones binomia combinadas con ecuaciones cuadráticas

Definición:

Se llama ecuación binomia a una ecuación del tipo $x^n-A=0$ con $A\in\mathbb{C}$. Los matemáticos de la antigüedad dieron gran importancia a estas ecuaciones, cuya solución se obtiene mediante el siguiente algoritmo:

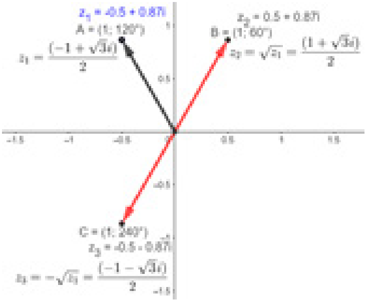


Figura 5. 28

PINCELADAS HISTÓRICAS

Figura 5. 29

Abraham De Moivre Matemático francés, 1667-1754. Realizó importantes contribuciones a probabilidad, estadística y trigonometría. Escribió un tratado fundamental sobre probabilidad y ayudó a transformar la trigonometría de una rama de la geometría a una rama del análisis a través del empleo de los números complejos. Demostró la fórmula

$(\rho cis\ (\varphi))^n=\rho^n\ cis(n\varphi)$

Algoritmo # 2

1. Expresar "A" como un número complejo en su forma trigonométrica; la ecuación queda en la forma $x^n-(a+-bi)=0 \Leftrightarrow x^n-\rho\ cis\ \varphi=0$ Si b=0, A es un número real y si a=0, A imaginarios puros.
2. Calcular las n raíces complejas de "A" aplicando la fórmula de Moivre.

$$\sqrt[n]{\rho\ cis\ \varphi}=\sqrt[n]{\rho} cis\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right);\ k=0,1,\dots n-1$$

3. Si se desea, se expresan las raíces en forma binómica, sustituyendo ρ y φ por sus valores.

Ejemplo 5.6:

Hallar las soluciones de la ecuación $x^6=64$

$$x^6=64\ cis\ 0 \Longrightarrow x=\sqrt[6]{64\ cis\ 0}=\sqrt[6]{64} cis\left(\frac{0}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)$$

$$=2cis\left(0+k\frac{\pi}{3}\right)$$

Soluciones:

$$x_1=2cis(0); k=0; x_2=2cis\left(\frac{\pi}{3}\right); k=1$$

$$x_3=2cis\left(2\frac{\pi}{3}\right); k=2; x_4=2cis(\pi); k=3$$

$$x_5=2cis\left(4\frac{\pi}{3}\right); k=4; x_6=2cis\left(5\frac{\pi}{3}\right); k=5$$

$$x_1=2;\ x_2=1+1{,}7325i; x_3=-1+1{,}7325i;$$

$$x_4=-2;\ x_5=-1-1{,}7325i; x_6=1-1{,}7325i;$$

La Figura 5. 31 muestra las raíces de una ecuación binomia distribuida sobre una circunferencia de radio ρ.

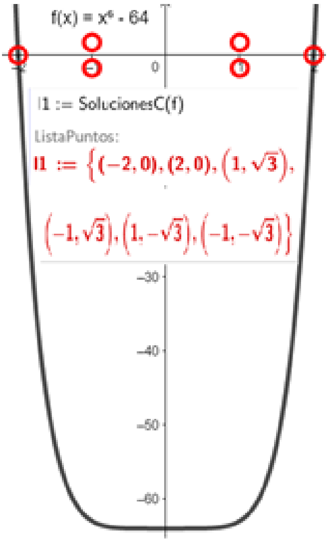


Figura 5. 30

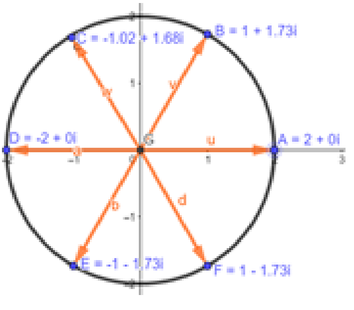


Figura 5. 31

$$l1 := \left\{(-2,0),(2,0),\left(0,\sqrt{2}\right),\left(0,-\sqrt{2}\right),\left(-3\cdot\frac{\sqrt{6}}{6},\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(3\cdot\frac{\sqrt{6}}{6},-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(-3\cdot\frac{\sqrt{6}}{6},-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(3\cdot\frac{\sqrt{6}}{6},\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(1,\sqrt{3}\right),\left(-1,\sqrt{3}\right),\left(1,-\sqrt{3}\right),\left(-1,-\sqrt{3}\right)\right\}$$

Figura 5. 32

Definición:

Se llama ecuación trinomia a una ecuación de la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \; con \; a, b, c \in \mathbb{R} \; y \; a \neq 0$$

Su solución lleva a un cambio de variables $y=x^n$ y de ahí la ecuación cuadrática $ay^2+by+c=0$ y la posterior solución de dos ecuaciones binomias.

Ejemplo 5.7:

Hallar las soluciones de la ecuación

$x^{12}-56x^6-512=0$ cambiando variables $y=x^6$:

$$\mathbf{y^2 - 56y - 512 = 0 \Rightarrow (y-64)(y+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 64 \\ o \\ y = -8 \end{cases}}$$

Sustituyendo en cambio de variable $x^6=64$ o $x^6=-8$.

La primera ecuación está resuelta, resuelva $x^6=-8$; según algoritmo; en Figura 5. 32 aparecen soluciones:

Ecuaciones del tipo $ax^m+bx^n+cx^p=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq0$ y $m,n,p \in \mathbb{Z}$ tales que $m>n>p$; $n=\frac{m+p}{2}$ La condición de ser "n" media aritmética entre "m" y "p" permite se reducir la ecuación a una cuadrática y tres ecuaciones binomia o a una ecuación binomia y una trinomia. Haciendo $q=n-p$ y dado que $n=\frac{m+p}{2}$ se obtiene: $n=p+q$; $2n=m+p \Rightarrow m=2q+p$

Ahora la ecuación se puede escribir de la forma:

Ejemplo 5.8:

Hallar las soluciones de la ecuación:

$x^{10}-x^6-6x^2=0.$

Solución parcial:

$x^2\ (x^8-x^4-6)=0$

$x^2=0 \Rightarrow x=0$

$x^8-x^s-6=0$

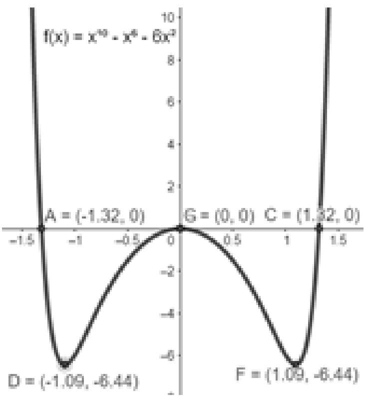


Figura 5. 33

Soluciones de la ecuación:

$$\left\{ i\sqrt[4]{3}, -i\sqrt[4]{3}, (1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{2}, (1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{2}, (-1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{2}, \frac{-1-i}{2}\sqrt[4]{2}^{3}, -\sqrt[4]{3}, 0, \sqrt[4]{3} \right\}$$

Figura 5. 34

$ax^{2q+p}+bx^{p+q}+cx^p=0 \Rightarrow x^p\ (ax^{2q}+bx^q+c)=0$

De lo anterior se infiere que

1. $x^p=0$ Primera ecuación binomia con p raíces repetidas e iguales a cero.
2. $x^{2q}+bx^q+c=0$ Ecuación trinomia de 2p raíces.

En Figuras 5.33 y 5.34, soluciones de la ecuación del ejemplo 5.8.

5.9. Función raíz cuadrada

Aunque la función cuadrática no inyectiva y por tanto no tiene inversa, si su dominio se restringe a $\mathbb{R}^+$ entonces su inversa es la raíz cuadrada como se muestra en Figura 5. 35.

$$h: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : h(x) = \sqrt{x}, \forall\ x \in \mathbb{R}_+$$

Características de la función:

<table>
<tr><td>Dominio h</td><td>$\mathbb{R}_+$</td><td>Imagen h</td><td>$\mathbb{R}_+$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Extremos globales</td><td colspan="2">Mínimo en
Min f=0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ceros</td><td colspan="2">x=0,punto(0,0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intersección con eje Y</td><td colspan="2">punto(0,0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Signos</td><td colspan="2">Positivo $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td colspan="2">h es inyectiva</td><td colspan="2">h es sobreyectiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">h es creciente en(0,+∞) (todo su dominio)</td></tr>
<tr><td colspan="2">h no es par</td><td colspan="2">h no es impar</td></tr>
<tr><td colspan="2">h no es aditiva</td><td colspan="2">h no es multiplicativa</td></tr>
<tr><td colspan="4">h no es simétrica respecto a x=p</td></tr>
</table>

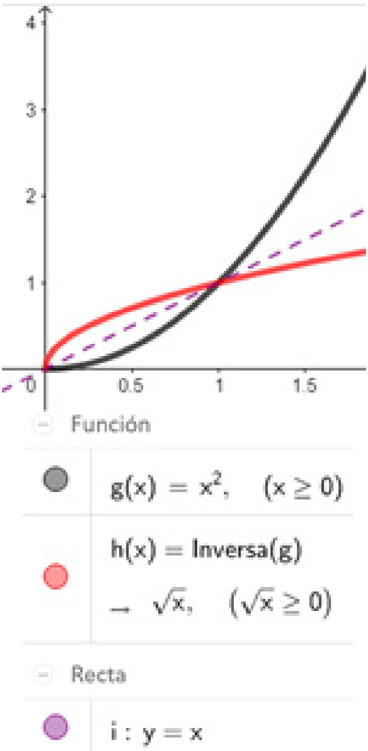


Figura 5. 35

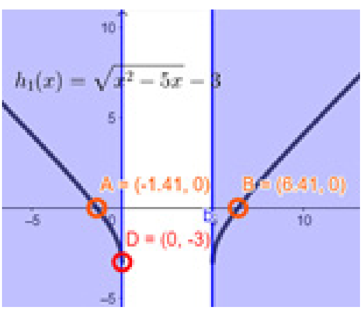


Figura 5.36

h tiene puntos fijos en x=0 y x=1.

La función h(x)=√x cumple con todas las leyes matemáticas relativas a la traslación, contracción y dilatación como se muestra en Figura 5. 36 donde se muestra el dominio y los ceros de la función:

$$h_1(x) = \sqrt{x^2 - 5x} - 3$$

El dominio está determinado por la inecuación:

$x^2 - 5x \geq 0$

Siguiendo algoritmo # 1

Dom.h_1:$x \leq 0 \vee x \geq 5$

En cuanto a los ceros se tiene:

$$\sqrt{x^2 - 5x} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 5x} = 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 9$$

$$x^2 - 5x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + \sqrt{25 + 36}}{2} \\ x = \dfrac{5 - \sqrt{25 + 36}}{2} \end{cases}$$

5.10. Ecuaciones cuadráticas en sistemas de ecuaciones no lineales

A diferencia de los sistemas de ecuaciones lineales, para los no lineales no existe ningún método de solución general que sea realmente práctico, por lo que para resolver cada uno se necesita utilizar procedimientos especiales de solución, aunque la práctica permite inferir ciertos procedimientos que ayudan en la búsqueda de la vía de solución, algunos pueden ser:

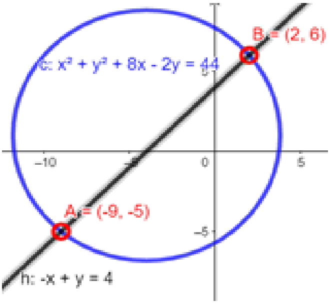


Figura 5. 37

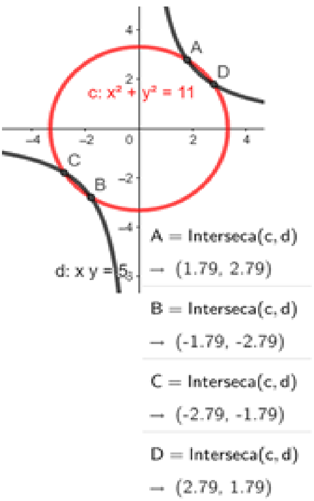


Figura 5. 38

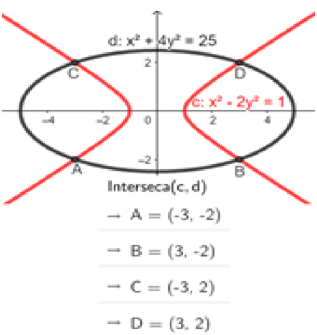


Figura 5. 39

Ejemplo 5.9:

Sistema de una ecuación lineal y una cuadrática:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 2y - 44 = 0 \text{ (I)} \\ \qquad y - x - 4 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Como método general de la solución de problemas está la transformación de un problema de modo que se reduzca a otro ya resuelto; en este caso la transformación debe tal que se obtenga una ecuación en una variable, problema ya resuelto.

Despejar una variable en la ecuación menos compleja.	y-x-4=0 y=x+ (III)
Sustituir variable despejada en ecuación más compleja (I).	$x^2+(x+4)^2+$ $8x-2(x+4)-44=0$
Desarrollar las transformaciones correspondientes	x^2+x^2+8x+ $16+8x-2x-8-44=0$ $x^2+7x-18=0$
Determinar las raíces de la ecuación	(x-9)(x-2)=0 $\Rightarrow x_1=-9$ o $x_2=2$
Sustituyendo en (III)	$y_1=-9+4=-5$ $y_2=2+4=6$
Concluir el ejercicio	Las coordenadas de los puntos de intersección son (-9;-5) y (2;6)

En Figura 5. 37 se muestra gráfico y solución del sistema con GeoGebra. En figuras 5.38 y 5.39 se muestran otros dos sistemas de ecuaciones con sus correspondientes soluciones

Ejercicios y problemas propuestos

V.1. Lee y analiza detenidamente los siguientes planteamientos y clasifícalos en verdaderos o falso, escribiendo (V ó F) en la línea correspondiente y explica tu criterio de selección respecto a los planteamientos que consideres falsos.

1. ____ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ donde a cada número real x se le hace corresponder $\frac{1}{x}$ es una función.
2. ____ La función real f dada por la ecuaciónf(x)=$\sqrt{x}$+3 no tiene ceros.
3. ____ La función g definida en los reales cuya ecuación es g(x)=1-2x es monótona decreciente en todo su dominio.
4. ____ La operación de radicación siempre se puede realizar en el conjunto de los números reales.
5. ____ La función g definida en por la ecuación $g(x)=(x-1)^2+3$ es una función par.
6. ____ La recta de ecuación x = 1 corresponde al gráfico de una función.
7. ____ Dada la ecuación $y^2+5x=14$, el único par ordenado (x; y) con x, y números enteros, y=-x que satisface la igualdad es (2; –2).
8. ____ Toda ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ tiene al menos una solución real.
9. ____ La función f, definida en $\mathbb{R}$ a través de la ecuación $f(x)=x^2+1$, es inyectiva.
10. ____ Las funciones definidas en los reales por la ecuación de fórmula $y=ax^2+bx+c$ donde a, b, y c son reales y a<0 alcanza el mínimo en abscisa de vértice $V(x_v;y_v)$ de la parábola.
11. ____ El gráfico de la función f definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $f(x)=x^3+8$ interseca el eje de las abscisas en el punto de coordenadas (-2;0)
12. ____ El dominio de la función h con h(x)= $\sqrt{x}$ es $\{x: x \in \mathbb{R}\}$

13. ____ Si a es un número real cualquiera entonces √a siempre está definida en $\mathbb{R}$.

14. ____ El conjunto imagen de la función de ecuación $y=(x+5)^2-2$ definida en el conjunto de los números reales es $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -2\}$

15. ____ El cero de la función h definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación $h(x)=4x-3$ es $x_0= \frac{3}{4}$.

16. ____ La función f definida de $(x \in \mathbb{R}: x \neq 0)$ en $(y \in \mathbb{R}: x \neq 2)$ por la ecuación $y = \frac{1}{x} + 2$ es impar.

17. ____ La función f definida para $\{x \in \mathbb{R}\}$ por la ecuación $f(x)=x^2+x+2$ tiene dos ceros.

18. ____ La función *f* definida para $x \in [-1;+\infty]$ por la ecuación $f(x)=(x-2)^2+1$ es decreciente para $x \leq 2$.

19. ____ Si x es un número real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

20. ____ La función f definida para $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$ por la ecuación $f(x)=-\sqrt{(x+1)}$ es monótona decreciente y tiene valor máximo y=0.

V.2. Escriba en la tabla adjunta las características de las funciones que se dan en este ejercicio. Auxíliese de algún asistente matemático, preferiblemente GeoGebra. Haga el gráfico de cada función.

a) $f_1(x)=x^2-3$

b) $f_2(x)=x^2+3$

c) $f_3(x)=(x+3)^2+3$

d) $f_4(x)=x^2+4x+7$

e) $f_5(x)=x^4+4x^2+7$

f) $f_6(x)=x^{12}+4x^6+7$

g) $f_7(x)=x^{16}+4x^{10}+7x$^4

Dominio	
Imagen	
Extremos globales	Mínimo
	Máximo

Ceros	
Intersección con eje Y	
Signos	
Inyectividad	
Monotonía	Creciente
	Decreciente
Paridad	Par
	Impar
Aditividad	Multiplicidad
Simetría respecto a	
Puntos fijos en:	

V.3. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $f_1(x)<0$

b) $f_2(x)\geq 0$

c) $f_3(x)>3$

d) $f_4(x)\leq f_3(x)$

e) $f_5(x)-f_3(x)\geq 0$

V.4. Utilizando la tabla del ejercicio V.2 analice las siguientes funciones. Auxíliese de algún asistente matemático, preferiblemente GeoGebra. Haga el gráfico de cada función.

a) $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$

b) $f_2(x) = \sqrt{x} + 3$

c) $f_3(x) = \sqrt{x+3} + 3$

d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$

e) $f_5(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2} + 7$

V.5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ 3x^2 - 2y^2 = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 124 \\ 2x^2 + 3y^2 = 120 \end{cases}$

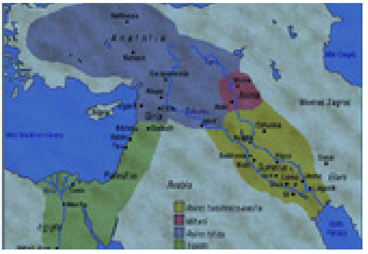
h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x^2 + xy = 56 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 41 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 131 \end{cases}$

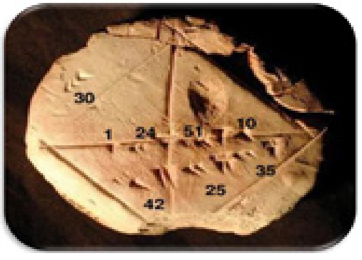
j) $\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + x - 2y = 20 \\ 2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y = 9 \end{cases}$

5.11. Pinceladas históricas

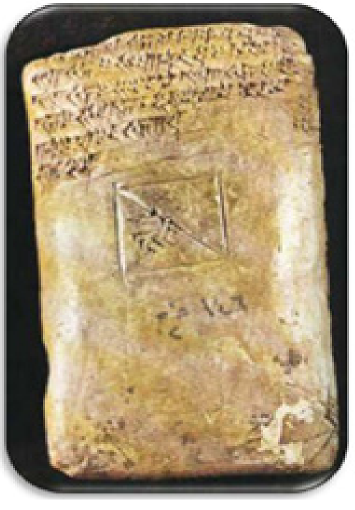
El estudio sobre la resolución y la aplicación de la ecuación de segundo grado se remonta a los orígenes de la matemática. Los especialistas han identificado cuatro estilos de encontrar las soluciones de ecuaciones de segundo grado: el geométrico, el retórico, el sincopado y el simbólico.



Antigua Babilonia
Figura 5. 40



Tablilla con cálculo.
Figura 5. 41



Tablilla con diagonal del cuadrado
Figura 5. 42

En Babilonia, 2000 años antes de nuestra era, la tablilla cuneiforme clasificada como BM13901 contiene abundante material relativo a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

BM13901 / Problema 1	Traducción al simbolismo algebraico moderno
He sumado el área y el lado de un cuadrado [y he obtenido]: 3/ 4	$x^2 + x = \frac{3}{4}$
Escribe 1, el coeficiente [del lado del cuadrado]. Divídelo en dos partes iguales. Multiplica 1/ 2 por 1/ 2: 1/ 4. Añade 1/ 4 a 3/ 4: 1.	$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ $= 1$
Esto es el cuadrado de 1.	$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2}$ $= 1$
Quita 1/ 2 de 1. El lado del cuadrado es 1/2.	$x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

El pensamiento griego estuvo marcado por el razonamiento de carácter puramente geométrico que relacionaba la cuadratura como la magnitud que se expresa con relación a la magnitud de sus lados. Con expresiones como “al cuadrado” o “es el cuadrado de…” se

Tablilla con trapecio

Figura 5. 42

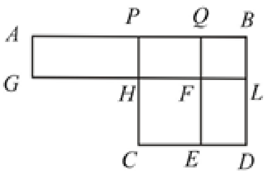


Figura 5. 43

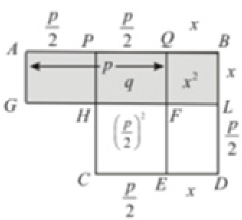
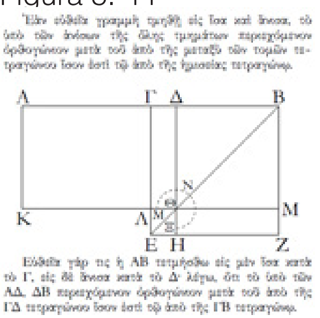


Figura 5. 44



Proposición II.5 en fragmento del libro "Los Elementos"

Figura 5. 45

describían en forma de argumentación verbal dentro de un sistema deductivo que tenía como propósito dar generalidad a sus procedimientos.

En la proposición II.5 de los Elementos de Euclides se describe la siguiente situación:

"Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera, junto con el cuadrado de la (recta que está) los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad".

En Figura 5. 43 se muestra una interpretación de esta proposición. Sea AB la línea recta (segmento) dada, la que es dividida en partes iguales por P, y en partes desiguales por Q. Entonces, la proposición expresa que:

$(AQ)(QB)+(PQ)^2=(PB)^2$ Con tales gráficas los pitagóricos estudiaron ecuaciones de los tipos:

$x^2+px=q$ (1); $x^2=px+q$ (2); $px=x^2+q$ (3)

El algoritmo resolver la ecuación tipo (1) es:

Algoritmo # 3

1. Construir un segmento $AQ=p$.
2. Construir un rectángulo AGLB igual a un área dada q, y tal que la diferencia entre él y el rectángulo de base AQ y de la misma altura sea un cuadrado $QFLB=x^2$ (así, QB=X.

3. Siendo P el punto medio de AQ, el cuadrado PCDB resuelve el problema, tomando B en la prolongación de AQ.

Esta transformación geométrica (Figura 5. 45) corresponde a la solución algebraica.

$$q = x^2 + px = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Para las ecuaciones de tipo (2) y (3) hay soluciones similares.

En la India la solución de segundo grado siguió otro camino, para resolver la ecuación x^2-10x=-9, el matemático indio Brahmagupta (ca. 628 d. C.) propuso el siguiente procedimiento:

Multiplica el número absoluto, –9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; el resultado es –9. Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio, 25, y resulta 16; cuya raíz cuadrada, 4, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita, –5, es 9; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, 1, da como resultado el valor de la incógnita, 9.

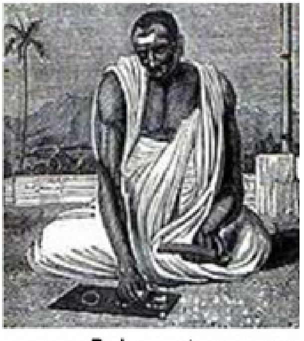
La "regla de Brahmagupta", aplicada a la ecuación

ax^2+bx=c se muestra en Figura 5. 48.

Los árabes también contribuyeron al desarrollo de los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas; el matemático Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi (s. IX) utilizó la siguiente estrategia para resolver la ecuación x^2+10x=39

Euclides

Figura 5. 46



Brahmagupta

Figura 5. 47

$$a^2x^2 + abx = ac$$

$$a^2x^2 + abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

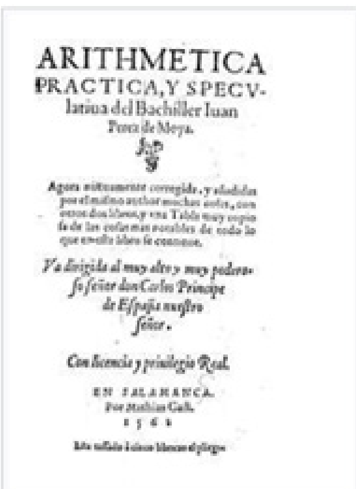
$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$$

Figura 5. 48

Figura 5. 49


ARITHMETICA
PRACTICA, Y SPECV-
latiua del Bachiller Iuan
Perez de Moya.

Con licencia y priuilegio Real.

Figura 5. 50

Debes tomar la mitad del número de las raíces, que es 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número, que es 8, y le restas la mitad de las raíces, 5, y obtienes 3, que es el valor buscado.

El Renacimiento comienza con los trabajos de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596), en su *Aritmética Práctica y Especulativa* (1562), resolvió en versión sincopada el siguiente problema cuadrático:

Dame un número que juntándole 5 y por otra parte quitándole 2 y multiplicando la suma por la resta, monte 98. Pon que el numero demandado es 1.co. [= x] si le juntares 5. n. [= 5] será 1.co. p.5.n. [= x + 5]. Si le quitas 2 quedará 1.co.m.2. [= x − 2] multiplicando 1.co.p.5.n. que es la suma, por 1.co.m.2.que es la resta, (...) monta 1.ce.p.3.co.m.10.n. [= $x^2 + 3x - 10$*] lo cual igualarás a 98.n. [= 98] que quisieras que vinieran destamanera 1.ce.p.3.co.m.10.n. ig. a 98.n. [*$x^2 + 3x - 10 = 98$*]. Passa los10.n. que vienen menos en la vna parte de la balança a la otra (...) y quedará la igualación destamanera 1.ce.p.3.co. ig.a 108.n. [*$x^2 + 3x = 108$*]. Sigue la regla partiendo llanamente los 3 y los 108 que es lo queviene con los menores caracteres, por 1 que viene con el ce. [=* x^2*] queen este exemplo es el mayor, y vendrà a los quocientes lo mismo: despuessaca la mitad del quociente del mediano, que es 3, y serâvno y medio, quadravno y medio, y seràn dos y vnquarto [= 9/4], juntalo con 108 que es el quociente del menor*

Figura 5. 51

(Jérôme Cardan; Pavía, Italia, 1501-Roma, 1576) Matemático italiano. gradado en la Universidad de Pavía se doctoró en medicina (1526) en la de Padua. Desde 1536 fue profesor de matemáticas en Milán.

Su obra en matemática:

1539: "Práctica de matemáticas y mediciones individuales; (resumen de sus clases).

1541: "Ars magna," su gran obra, un exhaustivo estudio de las ecuaciones de tercer grado y la regla para su resolución.

carácter,y montará 110 y vnquarto saca la r. será diez y medio, quita desto la otra mitad del quociente del mediano, que es vno y medio, y que darán nueue. Estos nueue es el valor de vna cosa [= incógnita] y respuesta de la demanda[3].

En 1545 el matemático Jerónimo Cardano reconoció las raíces imaginarias y las llamó "ficticias". Rafael Bombelli continuó los estudios de Cardano y en una de sus obras publicada en 1572 señaló que las cantidades imaginarias eran indispensables para la solución de ecuaciones algebraicas $x^2+a=0$ con $a>0$ Se necesitaron 350 años para que la afirmación de Bombelli fuese aceptada por matemáticos y filósofos.

[3] Se ha respetado la ortografía y redacción

CAPÍTULO VI.
LAS FUNCIONES POLINÓMICAS

"Una de las clases de funciones más útiles y mejor conocidas…es la de los polinomios algebraicos… Su importancia se debe a que aproximan de manera uniforme a las funciones continuas".

(Borden & Faires, 1985)

6.1. Funciones polinómicas

En el capítulo V se definió una función polinómica como una relación que asigna, a cada valor de la variable x, el valor que le corresponde si se la reemplaza en el polinomio que define por la fórmula,

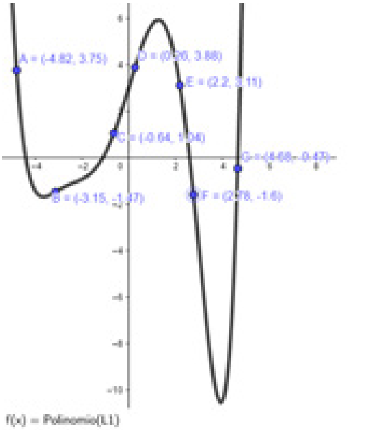


Figura 6.1

La función polinomial $f(x)=0.01x^6+0.02x^5-0.13x^4-0.59x^3+0.08x^2+3.33x+3.01$ describe la curva que pasa por los puntos: A,B,C,D,E,F,G.

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

$a_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 0; n, a_n \neq 0$ es decir:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f: x \longrightarrow P(x)$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

En los capítulos anteriores se han aplicado reglas y algoritmos para el tratamiento de funciones, fundamentalmente a casos particulares de funciones polinómicas (función constante, función lineal, función cuadrática, función bicuadrática, etc.), así como la solución de ecuaciones; en ellas se han respetado las teorías matemáticas y en el capítulo IV se definieron reglas para resolver ecuaciones que se repetirán en esta introducción, pero los autores han considerado prudente hacer una formalización elemental de la teoría que complementa la explicación de lo hecho

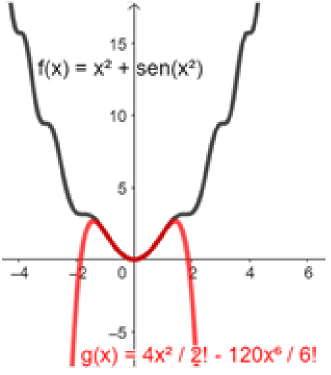


Figura 6.2

El polinomio g(x) Se aproxima a la función f(x) en un entorno de x=0.

PINCELADAS HISTÓRICAS

Carl Friedrich Gauss
1777 – 1855

Figura 6.3

y que es base para continuar el estudio de la función polinómica.

TEOREMA:

Teorema fundamental del álgebra:

"Todo polinomio en una variable de grado n≥1 con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una raíz (real o compleja)".

Esto significa que todo polinomio en x con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos un factor de la forma x-a, donde a es un número complejo.

Aunque está relacionado con los polinomios el siguiente teorema es de gran importancia para la teoría de ecuaciones.

TEOREMA:

Teorema del residuo o Teorema de Bézout

"Si se tiene un polinomio P(x) y se divide por x-a el residuo de la división es P(a)".

Demostración:

Si se divide P(x) entre (x-a) se tiene:

P(x)=Q(x)(x-a)+R (1)

Donde Q(x) es el cociente y R es el residuo.

Si ahora se evalúa (1) en x=a se obtiene:

P(a)=Q(a)(a-a)+R=0+R=R

De donde P(a)=R es el residuo.

A Carl Friedrich Gauss (1777-1855) se debe la revolución matemática del siglo XIX. A los 22 años defendió su tesis **“Nueva demostración del teorema que dice que toda función algebraica racional puede descomponerse en factores de primer o segundo grado con coeficientes reales”**. Primera demostración del Teorema Fundamental del Algebra y posteriormente desarrolla otras tres demostraciones:

1815: da la primera demostración totalmente algebraica eludiendo toda geometría.

1816: utiliza expresamente los números complejos.

1849: En el cincuentenario de su tesis, retoma la demostración de 1789 y extiende la variación de los coeficientes a los números complejos.

TEOREMA:

Teorema del factor:

“En un polinomio P(x), (x-a) es un factor si y solo si a es una raíz de la ecuación P(x)=0”

Demostración: (⇒)

Si (x-a) es factor de P(x) entonces:

P(x)=Q(x)(x-a)⇒P(a)=Q(a)(x-a)=0 por tanto, a es raíz de la ecuación P(x)=0 .

(⇐) Pero si a es raíz de la ecuación P(x)=0, esto implica que P(a)=0 Si se aplica el teorema del residuo se tiene que:

P(x)=Q(x)(x-a)+P(a)=Q(x)(x-a)+0=Q(x)(x-a)

por lo tanto, (x-a) es factor de P(x).

De este teorema se infiere el siguiente:

TEOREMA:

Teorema que permite la descomposición factorial de un polinomio entero.

“Si un polinomio P(x) de grado n se anula para los valores diferentes de la variable x_1; x_2; x_3;…x_h;con h≤n es divisible por el producto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_h)$

Si h=n se tiene:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\,a_0$$

(Figura 6. 4).

En el estudio de los métodos de solución de ecuaciones es fundamental

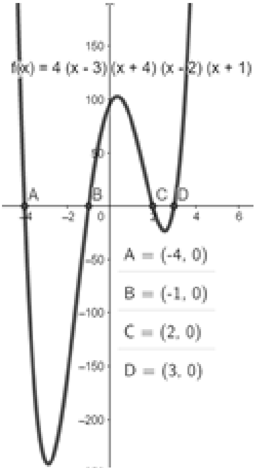


Figura 6.4

El polinomio se anula para {-4, -1, 2, 3}. Como la cantidad de divisores coincide con el grado del polinomio el mismo se descompone en:

P(x)=4(x-3)(x-2)

(x+1)(x+4)

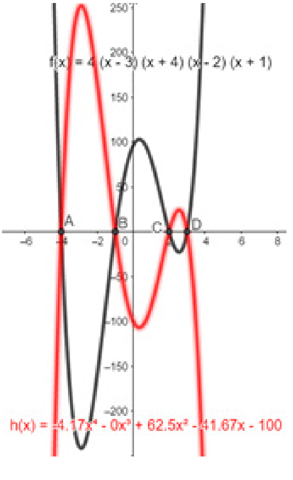


Figura 6.5

el concepto de ecuaciones equivalentes ya enunciado en capítulo IV:

Definición:

Dos ecuaciones que se satisfagan para los mismos valores de las incógnitas, es decir, que admitan las mismas raíces, se denominan equivalentes (Figura 6.5).

Observe que:

Retomando lo planteado en capítulo IV, los métodos para resolver ecuaciones transforman la ecuación original en otra más sencilla, generalmente se obtiene una ecuación equivalente, pero si esto no es posible, la nueva ecuación contiene todas las raíces de la original.

Las reglas dadas en capítulo IV sobre las posibles transformaciones de una ecuación y sus consecuencias se fundamentan en los siguientes teoremas:

TEOREMA:

Sumando (o restando) a los dos miembros de una ecuación P(x)=Q(x) la misma expresión algebraica entera M(x) (en particular una constante) resulta una ecuación equivalente.

En Figura 6.6 se muestran las consecuencias de sumar expresiones algebraicas enteras y expresiones fraccionarias en ambos miembros de una ecuación.

En la figura se muestra que f(x)=0 y h(x)=0 admiten las mismas raíces

{-4, -1, 2, 3}, por tanto son equivalentes.

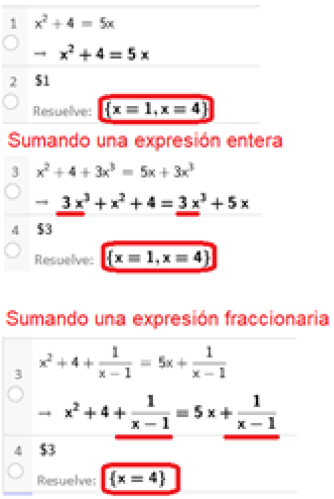


Figura 6. 6

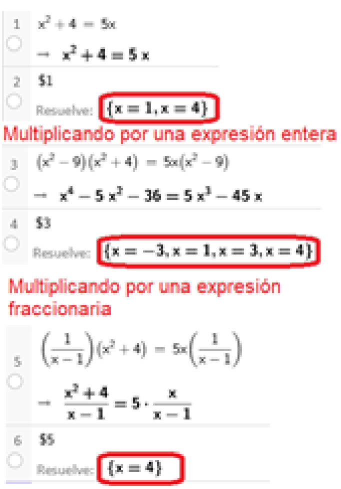


Figura 6. 7

TEOREMA:

Multiplicando (o dividiendo) los dos miembros de una ecuación P(x)=Q(x) por un mismo número m (diferente de cero) resulta una ecuación equivalente.

Observe que:

El teorema dice "un número m", pero si se multiplica por una expresión algebraica entera M(x), la nueva ecuación no es en general equivalente a la original, pero al menos admite todas sus raíces.

En Figura 6.7 se muestran los resultados de multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión entera y por una expresión fraccionaria.

TEOREMA:

Elevando los dos miembros de una ecuación a la misma potencia se obtiene una ecuación que admite, al menos, todas las raíces de la primera.

En Figura 6.5 se ejemplifica el teorema. En el caso la ecuación transformada no es equivalente a la ecuación original, pero contiene las soluciones de la original.

Cuando la ecuación transformada tiene más soluciones que la ecuación original, para determinar las soluciones de esta última se sustituyen los valores obtenidos en la primera ecuación (Figura 6.6).

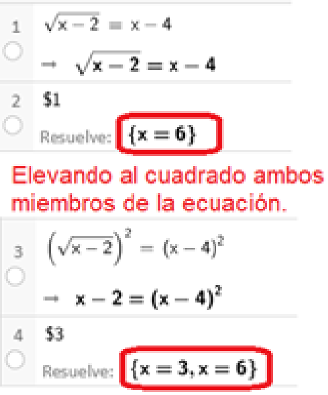


Figura 6. 8

$$\begin{gathered}\sqrt{x-2}\text{¿}\ ?x-4\\ \sqrt{3-2}\text{¿}\ ?3-4\\ \sqrt{1}\text{¿}\ ?-1\\ 1\neq -1\\ \sqrt{x-2}\text{¿}\ ?x-4\\ \sqrt{6-2}\text{¿}\ ?6-4\\ \sqrt{4}\text{¿}\ ?2\\ 2=2\end{gathered}$$

Figura 6. 9

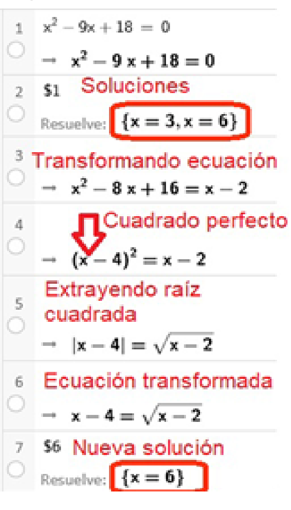


Figura 6.10

TEOREMA:

"Si se extraen raíces del mismo índice a los dos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación que en general contiene menos raíces que la primera". En Figura 6.7 se muestra un ejemplo.

Las soluciones de una ecuación se clasifican en:

$$\textit{Clasificación de las raíces}\begin{cases}\textit{Reales}\begin{cases}\textit{Racionales}\begin{cases}\textit{Positivas}\\ \textit{Cero}\\ \textit{Negativas}\end{cases}\\ \textit{Irracionales}\begin{cases}\textit{Positivas}\\ \textit{Negativas}\end{cases}\end{cases}\\ \textit{Complejas}\begin{cases}\textit{Forma binómica}\\ \textit{Forma trigonométrica}\end{cases}\end{cases}$$

La relación entre las raíces de una ecuación polinomial y los coeficientes se muestra en la generalización del teorema de Viète planteado en el capítulo V.

TEOREMA: Teorema de Cardano-Viète

Si $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$ son las "n" raíces de la ecuación polinomial: $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1\ x + a_0 = 0$; $a_n \neq 0$

Entonces se cumple:

Suma de raíces:

$$\boldsymbol{r_1 + r_2 + r_3 \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\ o\ \sum r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

Suma de productos binarios de las raíces:

$$\boldsymbol{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 \dots r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}\ o\ \sum_{i<j} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}}$$

Suma de productos ternarios de las raíces:

$$\boldsymbol{r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_4 \dots r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}}$$

PINCELADAS HISTÓRICAS

Étienne Bézout (Nemours, 1730-1783) matemático francés. Miembro de la Academia de las Ciencias Francesa, autor de una *Teoría general de ecuaciones algebraicas*, (1779) con resultados novedosos y de importancia acerca de la teoría de funciones simétricas.

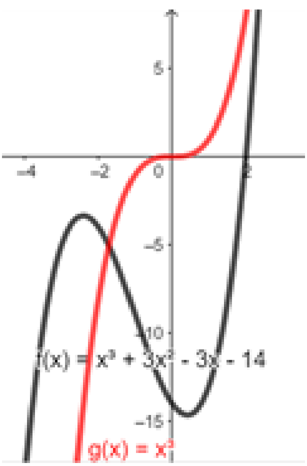


Figura 6. 11

$$o\ \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n};\ \dots$$

Producto de las "n" raíces:

$$r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

6.2. Función cúbica

Definición:

Una función cúbica o de tercer grado es un caso particular de función polinómica que usualmente se denota por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{con } a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

6.3. Casos particulares de la función cúbica

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f_1(x) = x^3, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Características de la función:

Dominio f_1	$\mathbb{R}$	Imagen f_1	$\mathbb{R}$
Extremos globales		No tiene	
Ceros		x=0,punto(0,0)	
Intersección con eje Y		punto(0,0)	
Signos		Positivo ∀ x>0 Negativo ∀ x<0	
f_1 es inyectiva		f_1 es sobreyectiva	
f_1 es creciente en(-∞,+∞)			
f_1 no es par		f_1 es impar	
f_1 no es aditiva		f_1 es multiplicativa	
f_1 no es simétrica respecto a x=p			
f_1 tiene puntos fijos en x=-1,x=0 y x=1.			

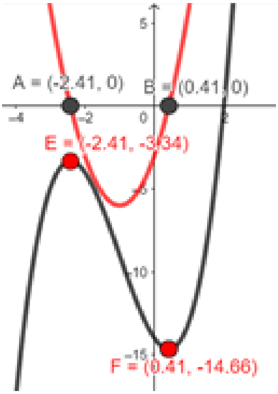


Figura 6. 12

PINCELADAS HISTÓRICAS

Niccolò Fontana (c. 1500-1557) ma-temático e ingeniero italiano, apoda-do **Tartaglia** por su tartamudez. De autodidacta llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Creó un método para resolver la ecuación de tercer grado, Su obra; aplicó el razonamiento matemático a los problemas bélicos. Murió en Venecia; víctima de la pobreza.

6.4. Propiedades de la función cúbica

1. El gráfico es una función polinomial (Figura 6.11.
2. La gráfica intercepta al eje Y en el punto (0, d).
3. Los máximos y mínimos se corresponden con los ceros de la derivada de la función dada por la expresión $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ (Figura 6. 12).
4. Los ceros de la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Tuvo que esperar al siglo XVI en un proceso de búsqueda en el que no faltaron debate enconados y disputas entre dos grandes matemáticos de la época Jerónimo Cardano y Nicolo Fontana.

Las fórmulas de Cardano que trascienden hasta nuestros días se expresan del siguiente modo:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$; si la ecuación se divide por a se transforma en $x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3=0$

$$Q = \frac{3a_2 - {a_1}^2}{9} \qquad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2{a_1}^3}{54}$$

Discriminante $D=Q^3+R^2$;

$$S = \sqrt[3]{R+D}\ ;\ T = \sqrt[3]{R-D}$$

$$\text{Soluciones:} \begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \end{cases}$$

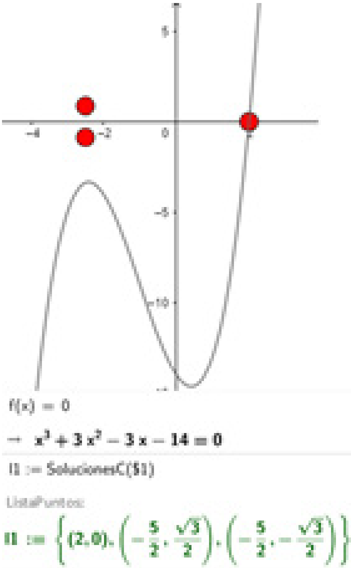


Figura 6. 13

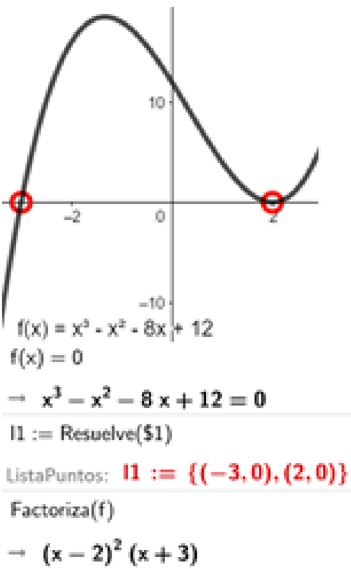


Figura 6. 14

Si a_1, a_2, a_3 son números reales, entonces

$$\begin{gathered} Si\ D > 0\ (Figura\ VI.13)\ la\ ecuación\ tiene: \\ Una\ solución\ real\ y\ dos\ complejas\ conjugadas \\ Si\ D = 0\ (Figura\ VI.14) la\ ecuación\ tiene: \\ tres\ raices\ reales\ y\ al\ menos\ dos\ son\ iguales \\ Si\ D < 0\ (Figura\ VI.15) la\ ecuación\ tiene: \\ Tres\ raíces\ reales\ y\ distintas \end{gathered}$$

Para D<0 existen otras fórmulas trigonométricas que simplifican el proceso.

Ejemplo 6.1:

Resolver la ecuación $x^3-x^2-8x+12=0$ aplicando fórmulas: $Q = \frac{3(-8)-(-1)^2}{9} = \frac{-25}{9}$

$$R = \frac{9(-1)(-8) - 27(12) - 2(-1)}{54} = \frac{-125}{27}$$

$$D = \left(\frac{-25}{9}\right)^3 + \left(\frac{-125}{27}\right)^2 = 0; S = \sqrt[3]{\frac{-125}{27}} = \frac{-5}{3} = T;$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5}{3} + \dfrac{-5}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-9}{3} = -3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-10}{3}\right) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-10}{3}\right) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{cases}$$

Soluciones: {-3,2}

6.5. Propiedades de la función polinómica de grado cuarto y superior

En el epígrafe 6.4 se describieron las propiedades de la función cúbica o polinomio de tercer grado, ellas se mantienen para las funciones polinómicas de cuarto grado o superior y sólo difieren en lo relativo a los ceros de la función.

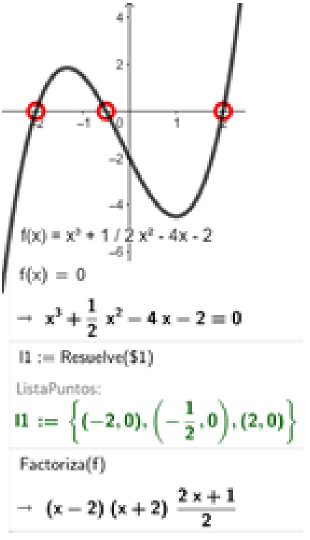


Figura 6. 15

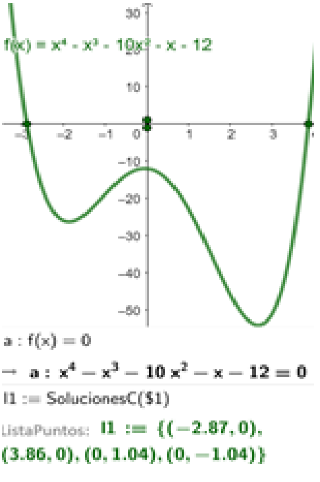


Figura 6. 16

PINCELADAS HISTÓRICAS

Ludovico Ferrari: matemático italiano (Bolonia, 2/2/ 1522-5/10/1565). Fue uno de los ma-

Para la solución de ecuación cuártica existen dos métodos fundamentales de solución, el primero se debe al matemático italiano Ludovico Ferrari, quien mediante artificiosos cambios de variables reduce a la ecuación general de cuarto grado a una de tercer grado, la cual resuelve mediante las fórmulas de Cardano.

El segundo método se debe a Renato Descartes, su procedimiento consiste en eliminar el término el término cúbico mediante sustituciones tan artificiosas como las de Ferrari, con lo que obtiene dos factores cuadráticos, y con ellos el problema se reduce a calcular las raíces de estas ecuaciones.

Aunque ambos métodos resultan interesantes desde el punto de vista matemático, encierran bastante complejidad en su desarrollo por lo que los autores lo tomarán como un referente histórico, como se muestra en Figura 6.15 es posible encontrar las soluciones de una ecuación de cuarto grado por otros medios.

Si hacemos un alto en la exposición de temas matemáticos podremos constatar que la solución de ecuaciones algebraicas ha sido el resultado de un largo proceso de investigación, así, las notas históricas que se han dado nos llevan a los primeros intentos de solución de ecuaciones de segundo grado con Diofanto de Alejandría alrededor del 250 antes de nuestra era, de estos inicios hubo que esperar más de mil años, hasta que Al-Khwarazmí, yores representantes de la escuela de Bolonia, dedicada al estudio del álgebra. Descubrió la vía de resolver la ecuación general de cuarto grado y dio la demostración de la fórmula para resolver la de tercer grado. Vivió en una época marcada por las contradicciones entre las grandes familias italiana, los Estados Papales, los franceses y los españoles que luchaban las posesiones del norte de Italia. Inicialmente se educó en su casa y a los 14 años se convirtió en sirviente de Cardano, quien al descubrir que sabía leer y escribir lo tomó como secretario para que le escribiera sus libros y empezó a enseñarle matemáticas. A los 18 años empezó a enseñar a otros y a demostrar públicamente sus conocimientos y habilidades en la resolución de problemas matemáticos.

Figura 6. 17

Paolo Ruffini: (1765-1822). Matemático italiano. Estableció las bases de la teoría de las transformaciones de

en el siglo IX de nuestra, publicó su "al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ŷabr wa-l-muqābala" con un algoritmo preciso para darle solución a estas ecuaciones.

Después se necesitaron casi 700 años, para que en 1545 con el "Artis magnae, sive de regulis algebraicis", o "Ars magna" de Cardano cayeran rendidas ante el genio de los matemáticos las ecuaciones de tercero y cuarto grado, pero la quíntica seguía en pie, y esta vez se necesitaron 279 años, en 1824 se dio a conocer el Teorema de la imposibilidad de Abel o teorema de Abel-Ruffini, el cual plantea que

"No pueden resolverse por radicales las ecuaciones polinómicas generales de grado igual o superior a cinco".

¡ATENCIÓN!, el teorema no plantea que las ecuaciones polinómicas de quinto grado o de grado superior no tienen solución, recuérdese que el teorema fundamental del álgebra demuestra que todo polinomio de grado "n" admiten "n" soluciones reales o complejas, pero el teorema precisa que **no es posible encontrar tales soluciones aplicando únicamente un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces a los coeficientes de la ecuación.**

El teorema fue nombrado por Ruffini, quien hizo una prueba incompleta en 1799, y Abel proporcionó una prueba en 1823. Galois demostró de forma independiente el teorema en una obra que fue publicada póstumamente por ecuaciones, descubrió y formuló la regla del cálculo aproximado de las raíces de las ecuaciones, creó la Regla para hallar los coeficientes de la división de un polinomio por el binomio (x - k).

Figura 6. 18

Niels Henrik Abel. (5/8/ 1802–6/4/1829) matemático noruego, han trascendido sus trabajos en álgebra y funciones hiperbólicas. Visitó a Alemania y Francia. En la primera hizo brillante investigación sobre funciones; en Francia conoció importantes matemáticos, pero ni él ni su trabajo fue bien valorados. La pobreza lo acompañó toda su vida y Murió de tuberculosis a los 26 años.

Joseph Liouville quien en 1843 revisó los manuscritos de Galois y constató que aquel joven había resuelto el problema de Abel por otros medios que suponían una verdadera revolución en la teoría de las matemáticas empleadas; finalmente el manuscrito de Galois fue publicado en el número de octubre de 1846 del Journal des mathématiques pures et appliquées.

Por el interés que tienen para el desarrollo de las formas de pensamiento matemático se mostrarán algunos métodos de solución de ecuaciones polinómicas particulares de cuarto grado y superior pese a que en la actualidad las computadoras las resuelven en fracciones de segundo, pero como se ha dicho, es propósito de los autores mostrar que “la computadora no es una caja negra” y por otro lado todavía estas ecuaciones son objeto de estudio en programas de matemática de la enseñanza media.

6.6. Ecuaciones recíprocas de cuarto grado

Definición:

Una ecuación recíproca o recurrente es aquella que no varía cuando se cambia x por $\frac{1}{x}$; es decir, si a es solución de la ecuación entonces $\frac{1}{a}$ también lo es.

Es posible formular la siguiente pregunta ¿Qué forma adopta una ecuación recíproca de cuarto grado?

Figura 6. 19

Évariste Galois: matemático francés, vivió solo 21 años, del 25 de octubre de 1811 al 31 de mayo de 1832, por su genialidad como matemático fue incomprendido por brillantes académicos de su época y por su pasión revolucionaria sufrió prisión. Siendo un adolescente, determinó la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica sea resuelta por radicales. Ofreció las bases fundamentales para la teoría que lleva su nombre, con ella es posible conectar la teoría de cuerpos con la teoría de grupos, una rama principal del álgebra abstracta contemporánea y sustento teórico de los actuales sistemas de navegación por satélite. Galois fue herido de gravedad y abandonado en un duelo de pistolas contra el campeón de esgrima del ejército francés, falleciendo al día siguiente. Al parecer las circunstancias del duelo fueron amañadas por sus enemigos políticos.

Sea la ecuación (1)

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

Si la ecuación (1) es recíproca, se puede sustituir x por $\frac{1}{x}$ sin que se altere:

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^4+b\left(\frac{1}{x}\right)^3+c\left(\frac{1}{x}\right)^2+d\left(\frac{1}{x}\right)+e=0$$

$$\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e=0$$

Simplificando se tiene:(2)

$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$

De (1) y (2) se infiere que $a\neq0$ y $e\neq0$. Le proponemos como tarea justificar esta afirmación y como sugerencia analice qué número sería solución de la ecuación si a=0 o e=0 ¿Es esto posible dada las condiciones que cumplen las ecuaciones recíprocas? Evidentemente, de ser a=0 o e=0 una de las soluciones de la ecuación sería x=0 y por tratarse de una ecuación recíproca entonces $\frac{1}{0}$ sería también solución de la ecuación, lo cual no es posible.

La afirmación anterior permite dividir (1) por “a” y (2) por “e” obteniendo:

$$(3)x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

$$(4)x^4+\frac{d}{e}x^3+\frac{c}{e}x^2+\frac{b}{e}x+\frac{a}{e}=0$$

Restando (3) de (4) se obtiene:

$$(5)\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{e}\right)x^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{c}{e}\right)x^2+\left(\frac{d}{a}-\frac{b}{e}\right)x+\left(\frac{e}{a}-\frac{a}{e}\right)=0$$

Las ecuaciones (3) y (4) tienen 4 soluciones iguales, es decir, el polinomio se anula para 4 valores, por lo que la ecuación (5) conserva las propiedades, pero es un polinomio de grado tres que se anula para cuatro valores y según el principio de identidad de polinomio, si el número de valores que anulan a un polinomio de grado n es mayor que n, el polinomio es idénticamente nulo, es decir, todos sus coeficientes son cero. Esto justifica que:

a. $\frac{b}{a}-\frac{d}{e}=0 \Longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{e} \Longrightarrow be=da$

b. $\frac{c}{a}-\frac{c}{e}=0 \Longrightarrow \frac{c}{a}=\frac{c}{e} \Longrightarrow ce=ca$

c. $\frac{d}{a}-\frac{b}{e}=0 \Longrightarrow \frac{d}{a}=\frac{b}{e} \Longrightarrow de=ba$

d. $\frac{e}{a}-\frac{a}{e}=0 \Longrightarrow e^2-a^2=0 \Longrightarrow (e-a)(e+a)=0 \Longrightarrow e=a \vee e=-a$

De (d) se deduce que:

i. Si a=e entonces, sustituyendo en (a) o en (c) se tiene que b=d y la igualdad (b) se cumple para cualquier valor de c.

ii. Si a=-e entonces, sustituyendo en (a) o en (c) se tiene que b=-d y la igualdad (b) se cumple para c=0.

Se puede concluir entonces que:

Una ecuación recíproca de cuarto grado es de la forma:

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ o de la forma $ax^4+bx^3+cx^2-bx-c=0$

Observe:

El comportamiento de los términos equidistantes del término medio. ¿Puede inferir alguna regla?

Un ejemplo de tales ecuaciones puede ser:

$6x^4$-$5x^3$-$38x^2$-5x+6=0 Figura 6.20 cuyas soluciones utilizando nuestro asistente matemático son $\{x=-2, x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{3}, x=3\}$ y el gráfico se adjunta.

Si se realiza una "pequeña variación" a los coeficientes de modo que cumplan la segunda condición de las ecuaciones recíprocas de cuarto grado se tiene la ecuación: $6x^4$-$5x^3$-$38x^2$+5x-6=0

GeoGebra permite calcular el valor numérico aproximado de las soluciones: {x= 0.0713 -0.3832i, x=0.0713 +0.3832i, x=-2.2436, x= 2.9344}

Como puede observarse hay dos soluciones complejas. El gráfico ilustra este comportamiento.

¿Cómo resolver manualmente una ecuación simétrica de cuarto grado?

i. Una vez identificada que se trata de una ecuación simétrica de cuarto grado, la idea esencial de solución es reducirla a una de segundo grado, para ello tenemos la "ventaja" de saber que en este tipo de ecuaciones ninguna solución es cero y por tanto puedo dividir el polinomio por x^2.

Para la explicación se utilizará en cada paso la forma general de la ecuación que se analiza y la ecuación particular cuya solución se conoce porque se presentó el resultado que dio el asistente matemático.

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$

Resultado de este paso:

$$ax^2+bx+c+b\frac{1}{x}+a\left(\frac{1}{x}\right)^2$$
$$=6x^2-5x-38-5\frac{1}{x}+6\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$$

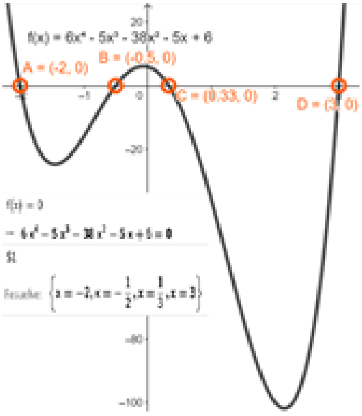


Figura 6. 20

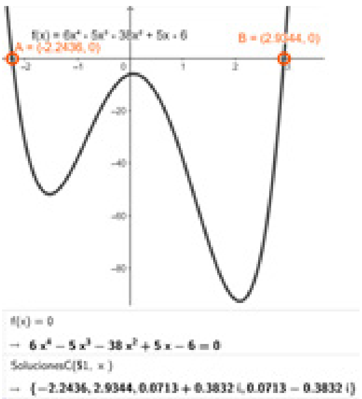


Figura 6. 21

ii. Realizar una agrupación "conveniente" de los términos.

$$a\left(x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c$$

$$=6\left(x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

iii.Completar un trinomio cuadrado perfecto en el primer agrupamiento, de modo tal que quede de la siguiente forma:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Por tanto, bastaría sumar 2a y restar 2a para no alterar resultado.

Las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$a\left(x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c-2a$$

$$=0\ a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+(c-2a)=0$$

$$6\left(x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38-12=0 \Rightarrow 6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-50=0$$

iv. Se impone ahora un elemental cambio de variable. Sea (iv) $z=x+\frac{1}{x}$

Las ecuaciones quedan de la siguiente forma

$az^2+bz+(c-2a)=0$ $\qquad$ $6z^2-5z-50=0$

Resolviendo esta ecuación se tiene:

$$\left\{\left\{z\to\frac{-b-\sqrt{8a^2+b^2-4ac}}{2a}\right\},\left\{z\to\frac{-b+\sqrt{8a^2+b^2-4ac}}{2a}\right\}\right\}$$

De las expresiones anteriores se deriva la siguiente interrogante:

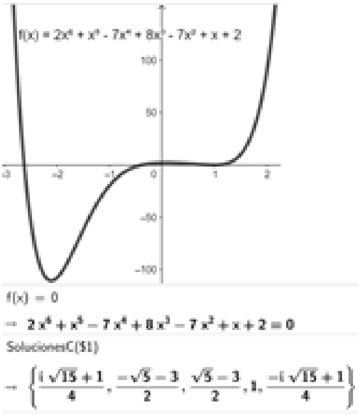


Figura 6. 22

Observe que hay seis raí-ces, aunque aparezcan cinco en el resultado, porque una raíz es x=1 y el recíproco de esta raíz es también x=1, por tanto, en x=1 hay un cero doble.

¿Qué condición deben cumplir los coeficientes de una ecuación recíproca de la forma $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$para que tengas soluciones reales?

La respuesta no admite dudas, $8a^2+b^2-4ac\geq 0$

Las soluciones de la ecuación en z son:

$$\{-\frac{5}{2},\frac{10}{3}\}$$

Sustituyendo en *(iv)* se tiene:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \Longrightarrow 2x^2+2=-5x \Longrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3} \Longrightarrow 3x^2+3=10x \Longrightarrow 3x^2+10x+3=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3=-3 \\ x_4=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Una de las soluciones generales es:

$$\{x \to \frac{-b-\sqrt{8a^2+b^2-4ac}-\sqrt{-16a^2+(b+\sqrt{8a^2+b^2-4ac})^2}}{4a}\}$$

Una buena tarea es calcular manual las soluciones para la segunda ecuación ejemplo.

6.7. Solución de ecuaciones auxiliado de la regla de Ruffini

Generalmente los libros de álgebra dan una descripción de esta regla que tiene como finalidad calcular el cociente y el resto de dividir un polinomio P(x) por un binomio (x-k), pero los autores han preferido emplear una tabla con un esquema del orden de las operaciones a realizar.

Se trata de dividir el polinomio $P(x)=2x^4-5x^3+x^2-x+3$ Por (x-2) y calcular el cociente y el resto.

Siguiendo el esquema habitual se trata de:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -5x^3 & +x^2 & -x & +3 & x+2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & -4x^3 & & & & 2x^3-9x^2+19x-39 \\
\cline{1-2}
0 & -9x^3 & +x^2 & & & \\
 & 9x^2 & +18x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 19x^2 & -x & & \\
 & & -19x^2 & -38x & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & -39x & +3 & \\
 & & & 39x & +78 & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 81 &
\end{array}
$$

El esquema de Ruffini simplifica el proceso como se muestra en la imagen:

	$P(x) =$	$2x^4$	$-5x^3$	$+x^2$	$-x$	$+3$	
		2	-5	1	-1	3	
Por $(x+2)$	-2		-4	18	-38	78	
		2	-9	19	-39	81	Resto
	$Q(x) =$	$2x^3$	$-9x^2$	$+19x$	-39		

Figura 6. 23

Pero la mayor importancia del esquema de Ruffini está en aplicarlo a la resolución de ecuaciones polinómicas.

Sea $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$ (Figura 6.24) un polinomio cuyas soluciones se desean calcular manualmente, y para ello se aplicará el esquema anterior, pero antes se debe recordar el teorema de Cardano-Vieta en lo referente al producto de las n raíces, en este caso se tiene que:

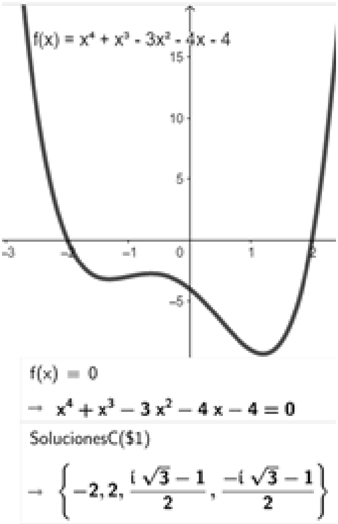


Figura 6. 24

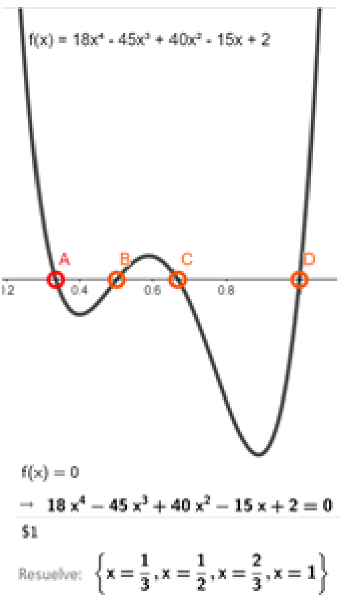


Figura 6. 25

$r_1\, r_2\, r_3\, r_4=(-1)^4\frac{-4}{1}=-4$

Entonces en los divisores de -4 hay alguna raíz de la ecuación. Estos divisores son ±1, ±2; ±4 podemos probar con estas posibles soluciones

	1	1	-3	-4	-4
1		1	2	-1	-5
	1	2	-1	-5	-9
P(x)=	x^3	$2x^2$	-x	-5	

-1 no es solución de la ecuación el resto es -9.

Probando con 2 se tiene

	1	1	-3	-4	-4
2		2	6	6	4
	1	3	3	2	0
P(x)=	x^3	$3x^2$	+3x	+2	

Como 2 anula el polinomio, por el teorema enunciado en $P(x)=(x-2)(x^3+3x^2+3x+2)$repitiendo el proceso se tiene

	1	3	3	2
-2		-2	-2	-2
	1	1	1	0
P(x)=	X^2	+x	+1	

Como -2 anula el polinomio

$P(x)=(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$

En estas condiciones solo queda resolver la ecuación cuadrática final cuyas soluciones son números complejos

Más laborioso es la búsqueda de las soluciones racionales o fraccionarias. Sea la ecuación $18x^4-45x^3+40x^2-15x+2=0$ (Figura 6.24).

Dividiendo por el coeficiente del término de mayor grado se tiene

$$x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{20}{9}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{9} = 0$$

Ahora las posibles soluciones se encuentran en los factores del numerador y el denominador y combinar ambos con esta concepción se tiene: $\mp 1; \mp\frac{1}{3}; \mp\frac{1}{9}$

	1	-5/2	20/9	-5/6	1/9
1		1	-3/2	13/18	-1/9
	1	-3/2	13/18	-1/9	0
P(x)=	x^3	$-3/2x^2$	13/18x	-1/9	
	1	-3/2	13/18	-1/9	
1/3		1/3	-7/18	1/9	
	1	-7/6	1/3	0	
P(x)=	x^2	-7/6x	1/3		

Ya que nuestra ecuación de segundo grado $(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x^2-7x+2)=0$

Completando la solución de la ecuación$(6x^2-7x+2)=0$ se encuentran las otras dos soluciones $x=\frac{1}{2};\ x=\frac{2}{3}$

6.8. Cuando una descomposición en factores resuelve el problema

Como en los casos anteriores no hay reglas para este método, pero realmente cuando “se entrena la vista” es posible aplicarlo con relativa facilidad.

Resolver la ecuación $2x^4-5x^3-11x^2+20x+12=0$

Para encontrar las soluciones $x=-2, x=-\frac{1}{2}, x=2, x=3$ de esta ecuación es posible aplicar la regla de Ruffini. Pero ¿Cuántos intentos fallidos podemos tener? Todo eso se puede evitar si el término medio se descompone fácilmente, si se percata de que $-11x^2=-3x^2-8x^2$

Lo que sigue es agrupar convenientemente

$2x^4-5x^3-3x^2-8x^2+20x+12=0$ $(2x^4-5x^3-3x^2)-(8x^2-20x-12)=0$

hasta llegar a $x^2(2x^2-5x-3)-4(2x^2-5x-3)=0$

$(2x^2-5x-3)(x^2-4)=0$

Ejercicios y problemas propuestos

VI.1. Constate el cumplimiento del teorema de Cardano Viète en los ejercicios resueltos y planteados como tareas.

Ecuaciones recíprocas:

VI.2. La ecuación $1-\frac{5a^2}{2}+a^4=0$ .es una ecuación simétrica.

Justifique este planteamiento y resuelva la ecuación.

VI.3. Las soluciones de la ecuación simétrica

$1-\frac{3iy}{2}+2y^2-\frac{3iy^3}{2}+y^4=0$ son todas complejas. Hállelas.

VI.4. Esta ecuación simétrica tiene dos soluciones reales y dos soluciones pertenecientes al conjunto de los complejos

$$1-\frac{17y}{4}+2y^2-\frac{17y^3}{4}+y^4=0$$

VI.5. Aunque los coeficientes de esta ecuación están dados en función del parámetro “a”

$1-\frac{2z}{3a}+2az-\frac{4z^2}{3}-\frac{z^2}{3a^2}-3a^2z^2-\frac{2z^3}{3a}+2az^3+z^4=0$, ella es una ecuación simétrica. Después de resolverla, construya otra ecuación sustituyendo el parámetro a por un valor numérico y constate los resultados calculados.

VI.6. Construya una ecuación simétrica con 4 soluciones reales. Construya una ecuación simétrica con 2 soluciones reales y dos complejas.

VI.7. Pruebe que si las soluciones de la ecuación

$az^2+bz+(c-2a)=0$ (z^1y z^2) son reales, entonces el cambio de variable nos conduce a las ecuaciones

$x^2-z_1 x+1=0$ y$x^2-z_2 x+1=0$ que contiene las soluciones finales deseadas.

VI.8. Si una ecuación de tercer grado es recíproca, entonces una de las raíces toma los valores 1 o -1. Justifique esta afirmación.

VI.9. Deduzca la forma que adopta una ecuación de tercer grado recíproca.

VI.10. De (VI.8) se puede inferir que si una ecuación de tercer grado es recíproca entonces se puede descomponer en el producto de

$(x-1)(ax^2+bx+c)=0$ o $(x+1)(ax^2+bx+c)=0$ ¿qué formato adopta la ecuación de segundo grado en cada caso.

VI.11. Las soluciones de la ecuación -$-1+\frac{13z}{3}-\frac{13z^2}{3}+z^3=0$ son $x1=1$; $x^2=3$; $x^3=1/3$ calcule estos valores utilizando las fórmulas que dedujo en (VI.9).

VI.12. Elabore un conjunto ecuaciones recíprocas de tercer grado y pruebe las fórmulas obtenidas.

VI.13. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones mediante el método de Ruffini:

$6+x+108x^4=3x^2\ (22+3x)$

$6+54x^2+9x^3+24x^5=35x+62x^4$

$41x+45x^3+71x^4+24x^6=6+89x^2+86x^5$

$x(5a^3+5a^2\ x+x^3)=6a^4+5ax^3$

VI.14. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante un agrupamiento conveniente:

$x^4+6x^3+13x^2+12x+4=0$

$x^4-x^3-8x^2+8=0$

$x^4+2(m-1)x^3-(5m-1)x^2+2(m^2+1)x-m=0$

6.9. Pinceladas históricas

Aunque en el capítulo se han presentado varias "pinceladas históricas", al tratar la ecuación cúbica en el epígrafe 6.2 se expresó que la solución de la misma: *"tuvo que esperar al siglo XVI en un proceso de búsqueda en el que no faltaron debate enconados y disputas entre dos grandes matemáticos de la época Jerónimo Cardano y Nicolo Fontana"*. Pese a estas referencias, es conveniente explicar con más detalles los hechos de esta curiosa polémica.

Todo comenzó en 1515 en la Universidad de Bolonia donde impartía clases de Matemática el profesor Scipione del Ferro, el cual encontró el método para resolver las ecuaciones de tercer grado de la forma $x^3+px=q$, pero no divulgó su hallazgo y lo enseñó en forma exclusiva a su alumno Antonio María Fiore.

Fiore no fue un matemático destacado, pero, la posesión de la solución que había encontrado su maestro provocó en él un sentimiento de envanecimiento y subvaloración de los demás, por eso, al enterarse que el matemático Nicolo Fontana (Tartaglia) decía conocer la forma de resolver la referida ecuación, pensó que se trataba de un jactancioso y lo desafió a un concurso público.

Tartaglia era un matemático de gran talento y simultáneamente con Ferro encontró la solución de la ecuación $x^3+px=q$; pero no satisfecho con este hallazgo prosiguió la investigación y determinó la vía para resolver la ecuación $x^3+px^2=q$ que es más general y compleja, por lo que con este conocimiento aceptó el reto de Fiore.

La competencia tuvo lugar el 12 de febrero del año 1535 y la regla de la misma estipulaba que cada contrincante planteaba a su oponente 30 problemas que debía resolver. Todos los problemas planteados por Fiore conducían a ecuaciones de la forma $x^3+px=q$ cuya solución conocía Tartaglia, mientras los de éste requerían de la solución de ecuaciones del tipo $x^3+px^2=q$, desconocidas por Fiore. El resultado del encuentro fue un rotundo éxito de Tartaglia y un ridículo para Fiore.

La fama de Tartaglia se extendió por toda la península italiana y llegó a oídos de otro contemporáneo al que se ha hecho referencia, Gerolamo Cardano, un matemático notable, pero con una vida llena de situaciones extravagantes que van desde ser acusado de hereje por publicar el horóscopo de Jesucristo hasta obtener una pensión asignada por el Papa.

En el momento en que se conocieron ambos matemáticos, Cardano desarrollaba su “Ars Magna”, la obra cumbre de vida, por lo que necesitaba la fórmula para la solución de la ecuación general de tercer grado y se cuenta en la historia que la obtuvo de Tartaglia, bajo promesa de no publicarla hasta que no lo hiciera su autor, pero esta promesa no se cumplió y, como consecuencia, Tartaglia acusó públicamente a Cardano por haber plagiado su descubrimiento.

Por supuesto que Cardano ripostó, pero esta polémica se dio más entre Tartaglia y Ludovico Ferrari, secretario de Cardano, quien salió en defensa de su patrono. Los dimes y diretes de ambos duraron 3 años, de 1545 fecha en la que se publica el “Ars Magna” al 1548 cuando se desarrolló otra importante competencia, pero esta entre Tartaglia y Ferrari.

En la referida competencia se propusieron 31 problemas por cada contrincante; esta vez los que planteó Tartaglia trataban temas de aritmética y geometría, los que Ferrari los resolvió sin dificultad; por su parte, Ferrari propuso situaciones más complejas que abarcaban matemática, astronomía y filosofía. Tartaglia resolvió 26 problemas correctamente y a los otros 5 dio soluciones sin explicar las vías utilizadas para alcanzarlas, por lo que se dio como vencedor a Ferrari.

Estas luchas científicas entre pintorescos personajes del pueblo, caracterizan el proceso de secularización de la ciencia, pues ya no son los clérigos enclaustrados en sus conventos y universidades los que hacen ciencia, ella surge de las necesidades de la vida social, se debate públicamente y está hecha por hombres de diferentes estratos sociales, desde el hijo de un cartero (caso Tartaglia) hasta el de un abogado (Cardano) o un criado como Ferrari.

El saldo de esta nueva forma de hacer ciencia fue muy positiva para la matemática, además de obtener nuevas fórmulas para la solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado se sistematizó y organizó el conocimiento matemático de la época en los trabajos de estos precursores, los que dieron paso a otras obras, como la de un apasionado lector de los libros de Gerolamo Cardano y seguidor de la disputa entre Tartaglia y Ferrari, el ingeniero Rafael Bombelli (1526-1572) quien con su obra “El álgebra, la mayor parte de la aritmética” (1572) cierra el ciclo italiano de la matemática renacentista.

CAPÍTULO VII.

LAS FUNCIONES RACIONALES

"Las funciones racionales ofrecen una ventaja más: permiten una aproximación eficiente de las funciones que tienen discontinuidades infinitas cerca del intervalo de aproximación, pero fuera de él. En este caso, la aproximación polinomial casi siempre resulta inaceptable".

(Borden & Faires, 1985)

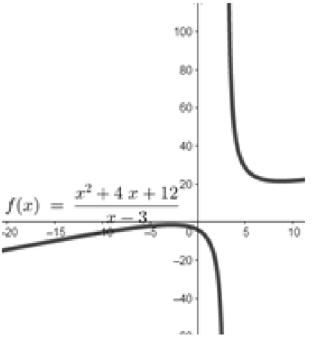


Figura 7. 1

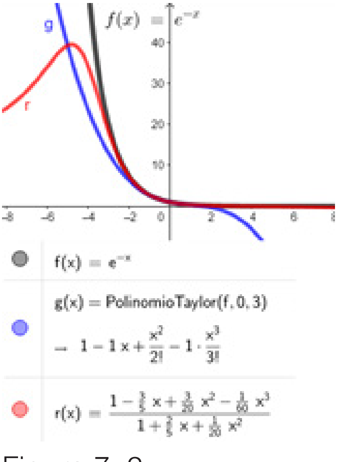


Figura 7. 2

7.1. Funciones racionales

El concepto de función racional (Figura 7.1) tiene como antecedente el concepto de número racional y la etimología de este término aduce a que estos números son la razón o cociente de dos números enteros, palabra cuya raíz proviene del latín ratio, y esta a su vez del griego λόγος (razón), que es como llamaban los matemáticos de la antigua Grecia a estos números, siguiendo esta idea, la notación $\mathbb{Q}$ empleada para nombrar el conjunto de los números racionales proviene de la palabra italiana quoziente, y fue utilizado por Giuseppe Peano en 1895. Extendiendo este concepto al campo de las funciones, una función racional se define como el cociente de dos polinomios.

Definición:

Una función racional de una variable es una función que puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

PINCELADAS HISTÓRICAS

Figura 7. 3

Henri Eugène Padé (1863 – 1953) matemático francés conocido por sus técnicas de aproximación de funciones usando funciones racionales. Estudió en la Escuela Normal Superior de Paris y en Alemania. Fue profesor asociado en la universidad de Lille (Francia) En1902 pasó a la Uni-versidad de Poitiers donde fue rector de la Academia de Aix-Marseilles.

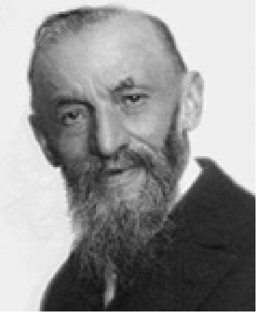


Figura 7. 4

Giuseppe Peano (1858 - 1932) matemático, lógico y filósofo italiano, conocido

Donde P_m (x) y Q_n (x) son polinomios de grados m y n respectivamente con Q_n (x) distinto del polinomio nulo.

Con esta definición y el gráfico de la Figura 7.2 es posible comprender el planteamiento de exergo dado al inicio del capítulo y aunque su contenido corresponde a estudios superiores de matemática, resulta comprensible en su aspecto esencial en este nivel.

En la referida figura aparecen los gráficos de la función $f(x)=e^{-x}$ y de dos aproximaciones:

$g(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$ obtenido por según la fórmula de Taylor y la función racional $r(x)=\frac{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3}{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}$ según la llamada aproximación de Padé; el gráfico evidencia que la curva r(x), da una mejor aproximación de la función f(x) que la g(x) obtenida al truncar una serie de Taylor.

Para iniciar el estudio de las funciones racionales se dan las siguientes definiciones:

Definición:

Se le llama asíntota de la gráfica de una función a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función; es decir que la distancia entre las dos por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números. Publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. Dedicó la mayor parte de su vida a enseñar en Turín.

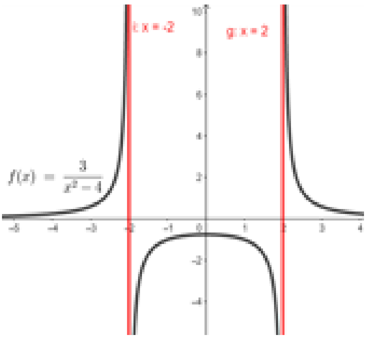


Figura 7. 5

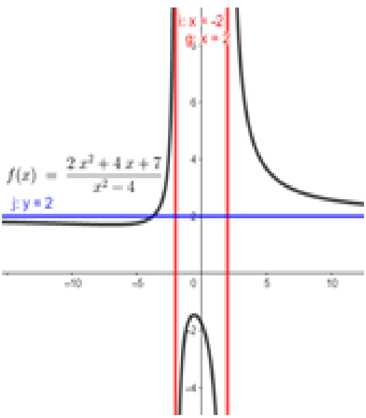


Figura 7. 6

tiende a ser cero (0), a medida que se extienden indefinidamente.

$$\textit{Tipos de asíntotas}\begin{cases} \textit{Verticales} \\ \textit{Horizontales} \\ \textit{Oblicuas} \end{cases}$$

- Asíntotas verticales: rectas paralelas al eje de las ordenadas, de ecuación *x=k;(k constante)*.
- Asíntotas horizontales: rectas paralelas al eje de las abscisas, de ecuación *y=k;(k constante).*
- Asíntotas oblicuas: rectas de ecuación *y=mx+b*

7.2. Propiedades de las funciones racionales

- El dominio de toda función racional son los números reales excluyendo las raíces del polinomio Q(x). Los valores de las raíces de Q(x) son las constantes de las asíntotas verticales.

Ejemplo:

Los ceros del denominador de la función racional f(x)= $\frac{3}{x^2-4}$ son $x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow$(x-2)(x+2)=0 de donde x=-2 ó x=2 ellas son también las asíntotas verticales (Figura 7.5).

Desde el punto de vista del Análisis Matemático, si existen algunos de los siguientes límites:

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta x=a es una asíntota vertical de la función *f*(x).

Aunque este contenido no está dentro de los objetivos del texto, pero si se analiza la gráfica de Figura 7.5 se puede tener una idea intuitiva del concepto definido.

Situación análoga se da con las asíntotas horizontales, para el Análisis Matemático, si existe $\lim_{x \to \pm\infty}$ f(x)=a , siendo a un valor finito, entonces y=a es una asíntota horizontal, en Figura 7.5, aunque no está señalada, y=0 (eje de abscisas es asíntota horizontal) y en Figura 7.6 lo es y=2; observe que en este caso la curva corta a la asíntota y posteriormente se muestra la su comportamiento asintótico, se destaca esta particularidad porque tal comportamiento de la curva y sus asíntotas no resulta frecuente.

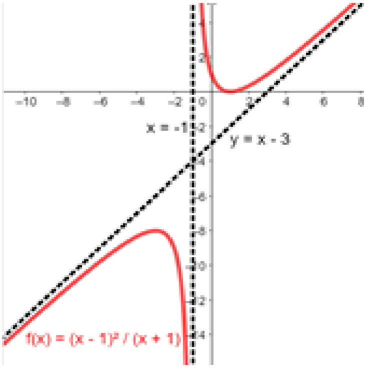


Figura 7. 7

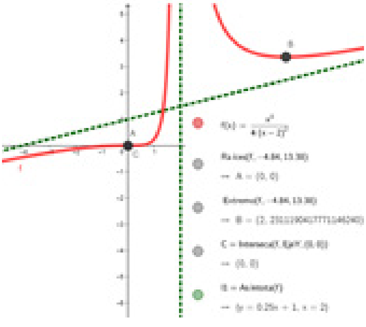


Figura 7. 8

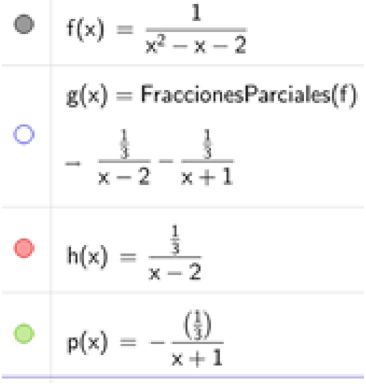


Figura 7. 9

7.2.1. Para evadir el límite en asíntota horizontal y oblicua

Para $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se tienen las siguientes reglas:

A. Si grado de P_m (x)<grado de Q_n (x) entonces la asíntota horizontal es y=0; tal es el caso de la función $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$; P_m (x)=3 es de grado 0 (cero) ye Q_n (x)=x^2-4 es de grado 2, por ser 0< 2 la asíntota horizontal de esta función racional es y=0

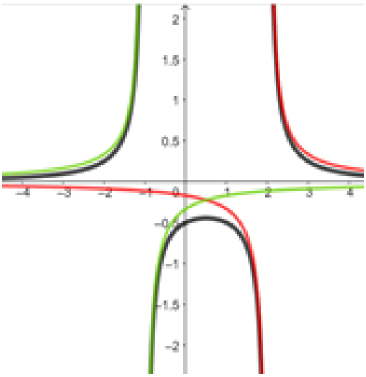


Figura 7. 10

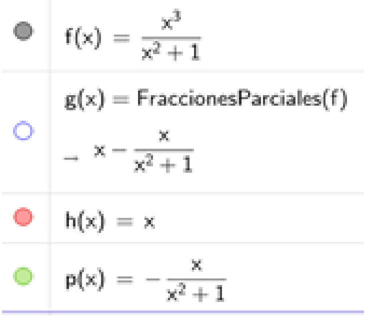


Figura 7. 11

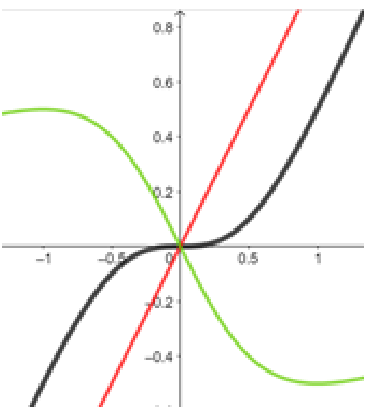


Figura 7. 12

B. Si grado de P_m (x)=grado de Q_n (x) entonces la asíntota horizontal es y=k siendo k el cociente de dividir los coeficientes de los términos de mayor grado de cada uno de los polinomios que forman la función racional. Para f(x)= $\frac{2x^2+4x+7}{x^2-4}$; P_m (x) y Q_n (x) son del mismo grado (2) y la asíntota es y= $\frac{coeficiente\ de\ 2x^2}{coeficiente\ de\ x^2} = \frac{2}{1} = 2$

C. Si grado de P_m (x)>grado de Q_n (x) no existe un límite finito y por tanto no hay asíntota.

Para la asíntota oblicua y=mx+b en una función como f(x)=$\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para calcular el coeficiente m es preciso

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{(x-1)^2}{x+1}}{x} = \frac{(x-1)^2}{x+1} \times \frac{1}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+x}$$ y

aplicar a esta expresión la regla dada anteriormente para el caso que se analiza m=1.

El término independiente b se calcula la expresión

$$f(x) - mx = \frac{(x-1)^2}{x+1} - x = \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x+1} = \frac{-3x+1}{x+1}$$

y se aplica a esta expresión las reglas estudiadas, en este caso b=-3, de ahí la ecuación y=x-3

GeoGebra tiene los comandos **"Puntos Especiales" y "Asíntotas"** que como se muestra en Figura 7.8, permite calcular estos elementos significativos de las funciones, en particular las racionales.

7.3. Descomposición de fracciones racionales en fracciones simples

De epígrafes anteriores se tiene el concepto de función racional y de grado de los polinomios que la forman. Según el grado de estos polinomios se clasifican en:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} Propia; si\ m < n \\ Impropia; si\ m \geq n \end{cases}$$

Toda función racional impropia puede ser expresada de manera única como suma de un polinomio más una función racional propia, es decir:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \underbrace{C(x)}_{\substack{polinomio \\ cociente}} + \underbrace{\frac{R(x) \leftarrow Resto}{Q(x) \leftarrow Divisor}}_{\substack{Fracción\ racional \\ propia}}$$

Definición:

Una función es racional simple (FRS): Cuando es de uno de los cuatro tipos siguientes:

Tipo 1. $Q(x) = ax + b\ ;\ FRS = \frac{A}{ax+b}$

Tipo 2. $Q(x) = (ax + b)^k$

$$FRS = \frac{A_k}{(ax + b)^k} + \frac{A_{k-1}}{(ax + b)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A}{ax + b}$$

Tipo 3. $Q(x) = ax^2 + bx + c\ con\ b^2 - 4ac < 0$

$$FRS = \frac{Ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

Tipo 4. $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k\ con\ b^2 - 4ac < 0$

$$FRS = \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{A_{k-1}x + B_{k-1}}{(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

El estudio de la descomposición de fracciones algebraicas corresponde a nivel superior, pero, GeoGebra posee el comando **Fracciones Parciales(<función>)** que facilita el cálculo (Figuras 7.9-7.12).

La descomposición de fracciones en fracciones simple tiene particular importancia para calcular las integrales de fracciones racionales.

7.4. Ecuaciones fraccionarias en una variable

Las ecuaciones fraccionarias en una variable son aquellas en las que aparecen fracciones algebraicas o, dicho de otro modo, cuando alguno de sus términos o todos tienen denominadores.

Ejemplo:

Determinar el conjunto solución de la ecuación $\frac{x+2}{x} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x^2-2}{x^2-2x}$

Aunque los asistentes matemáticos como el GeoGebra permiten resolver tales ecuaciones, en la enseñanza media se estudia su vía de solución que responde al algoritmo que a continuación se expone:

Método de solución	Ejemplo
Simplificar si es posible cada fracción y descomponer en factores los numeradores y denominadores de las fracciones algebraicas	$\frac{x+2}{x} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x^2-2}{x(x-2)}$
Determinar el dominio de la función que define la ecuación.	Dom:$\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \text{ y } x \neq 2\}$
Calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores o denominador común	x(x-2)

Eliminar los denominadores multiplicando ambos miembros de la ecuación por el m.c.m. **¡Ahora es posible que se introduzcan soluciones extrañas!**	$(x+2)(x-2)+x(x-1)=x^2-2$
Efectuar los productos indicados, reducir términos semejantes y ordenar la ecuación.	$x^2-4+x^2-x=x^2-2$ $x^2-x-2=0$
Resolver la ecuación obtenida	$\{\{x\to 2\},\{x\to -1\}\}$
Comprobar si las soluciones pertenecen al dominio de la ecuación original comparando con el dominio de definición o mediante la comprobación	La solución x=2 no pertenece al dominio de definición, por lo que la ecuación tiene una sola solución: x=-1

Observe que la ecuación transformada tiene más soluciones que la ecuación original; en la Figura 7.13 y 7.14 se muestra el comportamiento de ambas expresiones.

En el referido gráfico se han representado las funciones f(x)= $\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-2}{x(x-2)}$ y $g(x)=x^2-x-2$. La primera se corresponde con la ecuación original, la segunda con la ecuación transformada. Observe que f(x) sólo corta al eje de las abscisas en x=-1, mientras g(x) la corta en x=-1 y x=2. Con esto se ilustra lo expresado respecto a que al "eliminar denominadores" en una ecuación se obtiene una nueva ecuación que en general no es equivalente a la ecuación original, pero conserva sus soluciones

7.5. Inecuaciones fraccionarias

Ejemplo:

Resolver la inecuación $1+\frac{1}{x-4}\geq\frac{3}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$

Método de solución	Ejemplo
Expresar la inecuación en la forma E(x)≤0, E(x)≥0, E(x)<0, E(x)>0	$1+\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x^2-7x+12}-\frac{1}{x-3}\geq 0$
Determinar el dominio de la función que define la inecuación.	Dom: $\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3\ y\ x\neq 4\}$
Simplificar la expresión hasta expresarla en la forma $E(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$	$\frac{(x-3)(x-4)+(x-3)-3-(x-4)}{(x-3)(x-4)}$ ≥ 0
Efectuar los productos indicados, reducir términos semejantes y descomponer en factores las expresiones P(x) y Q(x).	$\frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)(x-4)}\geq 0$
Determinar ceros del numerador	x= 2; x=5
Determinar ceros del denominador	x=3; x=4
Construir tabla análoga a la adjunta para analizar comportamiento de los signos	

	-∞ 2	3	4	5	+∞	
X-2	-	+	+	+	+	Signo de cada factor por intervalo
X-3	-	-	+	+	+	
x-4	-	-	-	+	+	
x-5	-	-	-	-	+	
E(x)	+	-	+	-	+	Signo de E(x) por intervalo

Se han coloreado en rojo los valores 3 y 4 para destacarlos porque ellos corresponden a los valores no admisibles. En estos puntos los intervalos son abiertos porque marcan los puntos de discontinuidad de la función.

El conjunto solución es $S=[-\infty;2]\cup]3;4[\cup[5;+\infty[$

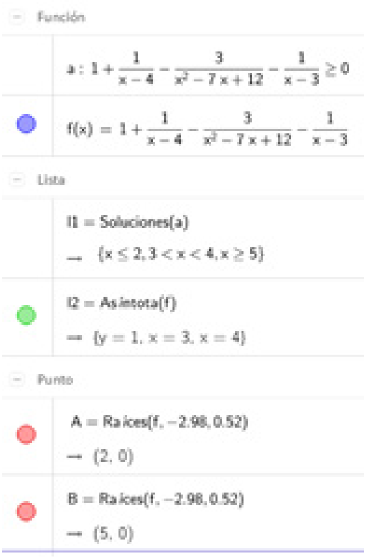


Figura 7. 13

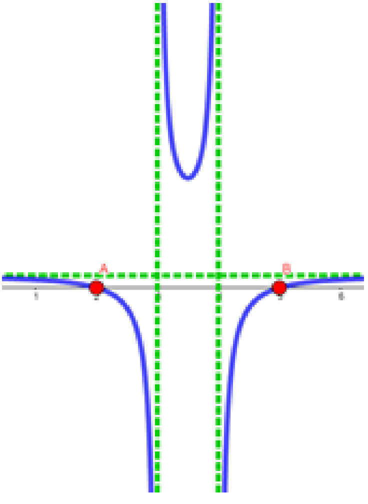


Figura 7. 14

Las soluciones de esta inecuación se muestran en las figuras 7.13 y 7.14, utilizando el asistente GeoGebra, en la primera se plantea la inecuación y se utiliza el comando Soluciones(<inecuación>) que devuelve el conjunto solución, y en la segunda se han calculado los puntos más significativos de la gráfica, sus ceros y asíntotas, con ellos y observando la gráfica es posible determinar las soluciones

Ejercicios y problemas propuestos

VII.1. Dada las siguientes funciones racionales:

» Determine su dominio

» Determine sus asíntotas

» Construya su gráfico

» Descompóngala en fracciones simples.

a) $f(x) = \frac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{3x^2+3}{x^3-3x-2}$

c) $h(x) = \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}$

d) $q(x) = \frac{x^6-x^2+1}{(x-1)^3}$

e) $p(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$

f) $r(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

VII.2. Resolver las ecuaciones

g) $\frac{x^2+5x}{x^2+x-12}+\frac{x}{x-3}=1$

h) $x^3+\frac{1}{x+2}=x+\frac{6x+13}{x+2}$

i) $x+\frac{1}{x-3}=\frac{3x-8}{x-3}$

VII.3. Utilizando sus conocimientos sobre solución de inecuaciones fraccionarias, resuelva los siguientes problemas:

a) Dada la función definida por:

$$p(x)=\frac{9x^2+4}{4x^2-9}$$

Determina para qué valores de x los puntos correspondientes al gráfico de "p" están por debajo del eje "X".

b) Sea. A(x)= $\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4}$ Determina el conjunto de números reales no negativos para los cuales A(x)≤0.

c) Sean: A= $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}$y $B=\frac{1}{x^4-1}$. Halla el mayor número entero negativo x para el cual se cumple

A·B≤0.

d) Dada la función

· $f(x)=\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2-4}$

determina los valores los valores reales de x para los cuales se cumple quef(x)≥0.

e) Sean las expresiones

$$A=\frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125} \text{ y } \quad B=\frac{3-3m^2}{m^3-4m^2+20m+25}$$

Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que $\frac{A}{B} = -\frac{m}{3}$.

Halla todos los valores reales de la variable m para los cuales se cumple que: $\frac{A}{B} \geq m^2 + \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}$

f) Sean la función real f dada por la ecuación: $f(x) = \sqrt{\frac{X^2+3X-15}{X+5} + 3}$ determina el dominio de f.

g) Halla para cuáles $x \in \mathbb{R}$ los puntos de la función f(x) se encuentran, en la representación gráfica, por encima o tocan los puntos de g(x).

$f(x) = \frac{x^3+4x^2}{x+5} + 4$ y $g(x) = \frac{20}{x+5}$

CAPÍTULO VIII.
LAS FUNCIONES IRRACIONALES

"El descubrimiento de los irracionales, lejos de lamentarlo por haber revelado una contradicción en las matemáticas pitagóricas, lo consideramos hoy como una de las grandes victorias del espíritu humano".

J. Dieudonné

PINCELADAS HISTÓRICAS

Figura 8.1

Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906 –1992). Matemático francés. Por la ocupación alemana durante la primera guerra mundial estudió en Inglaterra hasta 1923. En 1924, es admitido en la Escuela Normal Superior de París; posteriormente estudia en Estados Unidos donde defiende su tesis

8.1. Funciones irracionales

Las funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

a) $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 5}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x - 5}$

c) $\sqrt[4]{\frac{x^3+4x^2}{x+5}}$

Aunque en el epígrafe 5.9 se trató la raíz cuadrada y se definieron sus principales características, en este se retoma con el propósito de profundizar en su estudio.

En general, si en la función irracional estudiada el radical tiene índice impar, entonces el dominio será todo el conjunto R de los números reales porque al elegir cualquier valor de x siempre es posible calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.

sobre *polinomios y funciones acotadas*, en el año 1931. participa en la fundación del grupo Bourbaki, del que fue uno de los promotores principales durante muchos años.

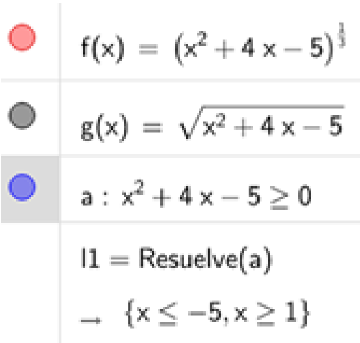


Figura 8.2

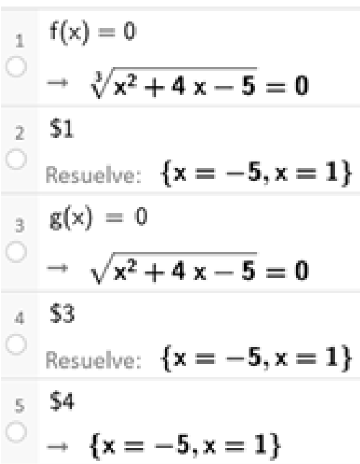


Figura 8.3

Pero si el radical tiene índice par, para los valores de x que hagan el radicando negativo no existirá la raíz y por tanto no tendrán imagen. Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación, se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

Los ejemplos a) y b) anteriormente planteados se han desarrollado en las figuras 8.2 - 8.4; como puede observarse, el dominio la raíz impar definida por f(x) son todos los números reales, mientras la raíz par definida en g(x) está definido por las soluciones de la inecuación $x^2+4x-5\geq 0$ representado por las dos franjas azules del gráfico de figura 8.4.

Como f(x) tiene dos cero en {x=-5,x=1} su punto medio está en $x_m=-2$ y el valor mínimo de la función se encuentra en (-2;f(-2))=(-2; -2,08) de ahí que Im f(x)={y∈ℝ:y≥-2,08}

Por su parte Im g(x)={y∈ℝ:y≥0}

Situación análoga se da con las asíntotas horizontales, para el Análisis Matemático, si existe $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, siendo a un valor finito, entonces y=a es una asíntota horizontal, en Figura 8.5, aunque no está señalada, y=0 (eje de abscisas es asíntota horizontal) y en Figura 8.6 lo es y=2; observe que en este caso la curva corta a la asíntota y posteriormente se

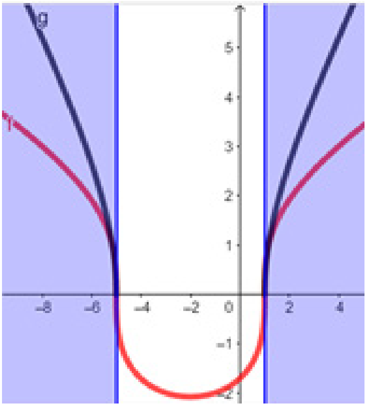


Figura 8.4

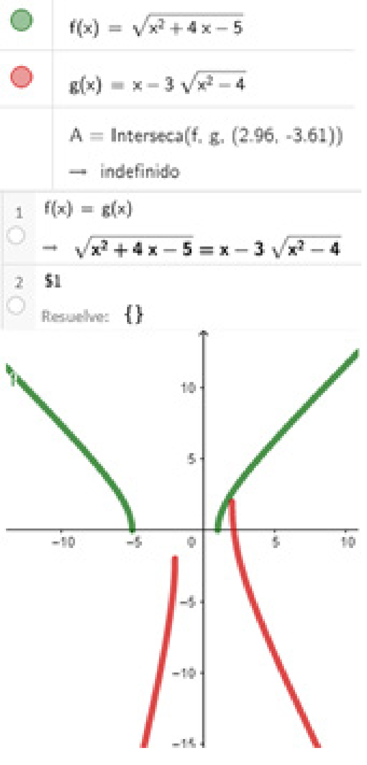


Figura 8.5

muestra la su comportamiento asintótico, se destaca esta particularidad porque tal comportamiento de la curva y sus asíntotas no resulta frecuente.

Es posible combinar expresiones racionales e irracionales y el dominio de la función está dado por el análisis independiente de cada función:

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+3} \qquad \sqrt{\frac{x+5}{x+3}}$$

8.2. Ecuaciones irracionales en una variable

Reciben el nombre de ecuaciones irracionales las que contienen una incógnita (o bien una expresión racional algebraica de la incógnita) bajo un signo radical.

Ejemplos:

a) $\sqrt{x^2+4x-5} = x - 3\sqrt{x^2-4}$

b) $\sqrt{x^2+4x-5} = -\frac{1}{2}x + 5$

c) $\sqrt[5]{x-3} = 4$

En figuras 8.5 y 8.6 aparecen las soluciones en GeoGebra de las ecuaciones de los ejemplos a) y b); la ecuación a) no tiene solución, mientras la ecuación b) tiene dos soluciones; en este caso las soluciones se han encontrado de dos formas, una tratando cada miembro de la ecuación como una función independiente y determinando

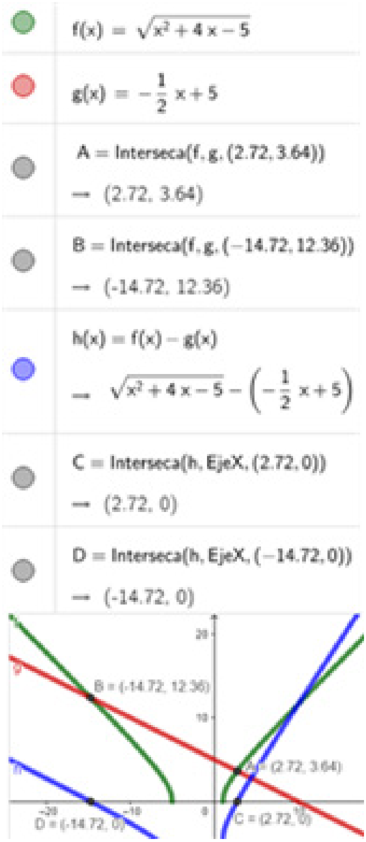


Figura 8.6

la intersección de ambas curvas, la segunda formando una nueva función y encontrando sus intersecciones con el eje de as abscisa.

Como en la formación matemática de cualquier estudiante de enseñanza media la solución de ecuaciones irracionales es un tema obligado en cualquier plan de estudio los autores han considerado prudente presentar las vías de solución de este tipo de ecuaciones.

En realidad, no hay un algoritmo preciso para resolver tales ecuaciones, pero el procedimiento a utilizar es análogo al utilizado con las ecuaciones racionales; en aquellas se transforma la ecuación racional en una ecuación entera o polinómica para darle solución y después desechar las raíces extrañas; para las ecuaciones irracionales el método consiste en transformar la ecuación irracional en una racional para una vez resuelta desechar las raíces extrañas.

El procedimiento más simple de hacer esta transformación es el de “liberar mediante la elevación sucesiva de ambos miembros de la ecuación a la potencia natural que convenga según el índice del radical que aparezca en la ecuación. Una regla puede ayudar en este proceso, porque si se ambos miembros de la ecuación se elevan a una potencia impar, se obtiene una ecuación equivalente a la inicial y por tanto no hay que desechar soluciones, pero si se eleva a una potencia par generalmente la nueva ecuación no es equivalente a la original.

Ejemplos:

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $\sqrt{\frac{10-7x+x^2}{12-7x+x^2}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$$\sqrt{\frac{10-7x+x^2}{12-7x+x^2}} = \frac{\sqrt{35}}{6} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{10-7x+x^2}{12-7x+x^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2 \Longrightarrow \frac{10-7x+x^2}{12-7x+x^2} = \frac{35}{36}$$

$$(10-7x+x^2)36 = (12-7x+x^2)35 \Longrightarrow 360-252x+36x^2 = 420-245x+35x^2$$

$$x^2-7x-60=0 \Longrightarrow x_1 = -5 \; o \; x_2 = 12$$

Comprobando las raíces encontradas:

$$\sqrt{\frac{10-7(12)+(12)^2}{12-7(12)+(12)^2}} - \frac{\sqrt{35}}{6} = 0 \qquad \sqrt{\frac{10-7(-5)+(-5)^2}{12-7(-5)+(-5)^2}} - \frac{\sqrt{35}}{6} = 0$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original. Se adjunta gráfico de la función.

8.2.1. Cuando un cambio de variable resuelve el problema.

Durante siglos los matemáticos han creado diversos algoritmos para resolver ecuaciones; en este libro se ha tratado de teorizar poco, proponer esquemas y algoritmos “relativamente cómodos”, ilustrar con gráficos, pero hay una vía que corresponde más al pensamiento lateral[4], este es el caso del cambio de variables que se ha utilizado anteriormente pero que ahora se enfatiza.

Aunque el método obedece a ciertas reglas como son:

1. Agrupar convenientemente los términos.
2. Determinar elementos comunes en tal agrupamiento.
3. Asignar una variable a uno de estos agrupamientos.
4. Sustituir en la ecuación esa variable para obtener una ecuación más sencilla.

---

4 El pensamiento lateral (del inglés *lateral thinking*) es un método de pensamiento que puede ser empleado como una técnica para la resolución de problemas de manera imaginativa. Se refiere a la técnica que permite la resolución de problemas de una manera indirecta y con un enfoque creativo. El pensamiento natural es una forma específica de organizar los procesos de pensa-miento, que busca una solución mediante estrategias o algoritmos no ortodoxos, que normal-mente serían ignorados por el pensamiento lógico.

5. Resolver la ecuación.
6. Sustituir los valores obtenidos en el cambio de variable y resolver las nuevas ecuaciones.
7. Etc., etc. … quizás algún otro paso.

Pero, en ese “agrupamiento a conveniencia” puede suceder que dos o más personas hagan diferentes agrupamientos o que una “vea” el posible agrupamiento que otra ni siquiera comprenda después de explicado, porque en ello se aplican más artificios matemáticos y pensamiento lateral que algoritmos matemáticos.

Ejemplo 2. Hallar el conjunto solución de la ecuación

$$2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 24$$

Si en esta ecuación se sigue la regla dada se haría una racionalización y producto de ella se obtendría una ecuación de cuarto grado, pero “transformando y agrupando convenientemente” se obtiene el siguiente resultado.

$$2x^2 - 6x - 24 + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0 \Longrightarrow 2(x^2 - 3x + 6) - 12 - 24 + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0$$

Se ha escrito en rojo “la clave del artificio” que con frecuencia se puede utilizar, sumar y restar una constante, en este caso 12 para obtener fuera del radical una expresión igual a la expresión que se encuentra afectada por el radical. De aquí el cambio de variables y la transformación es inmediata.

$$2(x^2 - 3x + 6) - 36 + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 6};$$

$$y^2 = x^2 - 3x + 6$$

Se plantea una ecuación de segundo grado en y:

$$2y^2 + y - 36 = 0 \Longrightarrow y_1 = 4 \; o \; y_2 = -\frac{9}{2}$$

Continúe el lector, sustituyendo el primer valor se tiene x^2-3x+6=16. Compruebe si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación original. En cuanto al valor negativo se desecha esa solución, en teoría de ecuaciones con radicales, para evitar ambigüedades se toma solo el valor principal de la raíz, a menos que se quieran considerar los dos valores y en ese caso en forma explícita se plantea $\pm\sqrt{\ }$.

Ejemplo 3. Hallar el conjunto solución de la ecuación

$$(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2$$

El dominio de esta ecuación es Dom:{x∈ℝ:x≠1 y x≠3}

Aquí el cambio está relacionado con otro artificio:

$$\frac{x-1}{3-x}=\frac{1}{\frac{3-x}{x-1}}$$

Algunos estudiantes expresan este artificio mediante la siguiente regla nemotécnica: "la unidad dividida una fracción da como resultado la fracción invertida".

El cambio es por tanto y= $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$ sustituyendo se tiene:

$$(3-x)y+(x-1)\frac{1}{y}=2 \Longrightarrow (3-x)y^2-2y+(x-1)=0$$

Ecuación cuadrática respecto a y, la que tiene como soluciones:

$$\Delta=(-2)^2-4(3-x)(x-1)$$
$$\Delta=4+4x^2-16x+12$$
$$\Delta=4(x^2-8x+4)$$
$$\Delta=4(x-2)^2;$$

$$x_1=\frac{2+2(x-2)}{2(3-x)}=\frac{x-1}{3-x};\quad x_2=\frac{2-2(x-2)}{2(3-x)}=1$$

Sustituyendo:

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=1 \Longrightarrow \frac{3-x}{x-1}=1 \Longrightarrow 3-x=x-1 \Longrightarrow x=2$$

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=\frac{x-1}{3-x} \Longrightarrow \frac{3-x}{x-1}=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^3 \Longrightarrow x=2$$

Quizás usted ha quedado atónito por "tanto cálculo para tan poco resultado", por si lo duda, se adjunta el gráfico.

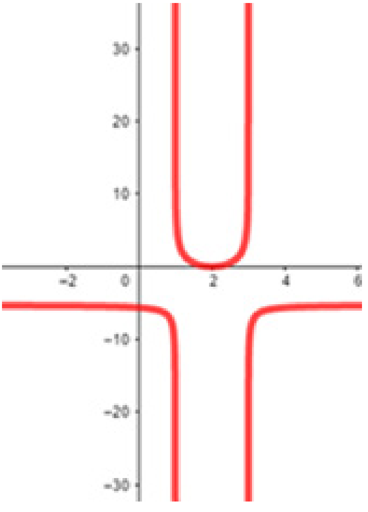


Figura 8. 7

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$$a\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$$

El dominio son los x reales tales que x>0

$$a\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}\Leftrightarrow a\sqrt[4]{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\sqrt[4]{x}\text{ Factor común } a\sqrt[4]{1+x}$$

$$a\sqrt[4]{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\sqrt[4]{x}\Leftrightarrow a\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\text{ Dividiendo por } \sqrt[4]{x}$$

$$a\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{4}}=1$$

Desarrollando una diferenciación de caso dado el parámetro a:

Para a=0: La ecuación no tiene solución.

Para a≠0 $\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{4}}=\frac{1}{a}$

Para a<0: No hay solución. Recuérdese que el dominio son x>0 y para cualquier valor de ese dominio el primer miembro es positivo.

Para a>0: Elevando ambos miembros a 4/5 se tiene:

$$1+\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}-1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^4}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[5]{a^4}}{1-\sqrt[5]{a^4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{a^4}-1}}$$

La expresión final tiene sentido para a<1. Por lo tanto, para cualquier valor real a tal que 0<a<1 la ecuación tiene por solución

$$x=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{a^4}-1}}$$

8.2.2. Cuando una descomposición en factores resuelve el problema

Como en los casos anteriores no hay reglas para este método, pero realmente cuando “se entrena la vista” es posible aplicarlo con relativa facilidad.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación

$2x^4-5x^3-11x^2+20x+12=0$

Para encontrar las soluciones $\left\{x=-2; x=-\frac{1}{2}; x=2; x=3\right\}$ de esta ecuación es posible aplicar la regla de Ruffini explicada en 6.7, pero, ¿Cuántos intentos fallidos se pueden tener al probar con cada uno de los divisores de 12 y 2 hasta encontrar las soluciones de la ecuación?

Esa pérdida de tiempo se puede evitar si el término medio se descompone, "estratégicamente" y usted puede darse cuenta cuán fácil es $-11x^2=-3x^2-8x^2$, a lo que sigue agrupar convenientemente:

$2x^4-5x^3-3x^2-8x^2+20x+12=0$

$x^2(2x^2-5x-3)-4(2x^2-5x-3)=0$

$(2x^2-5x-3)(x^2-4)=0$

Queda a usted transformar la ecuación anterior hasta obtener los resultados dados al inicio; este proceder se aplicará en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6. Resolver la ecuación

$$\sqrt{20+19x+3x^2}-\sqrt{-15+2x+x^2}=x+5$$

Si usted intenta elevar al cuadrado ambos términos de la ecuación puede que llegue al resultado final, pero el trabajo algebraico es considerable, ahora valore esta propuesta:

$$\sqrt{(x+5)(3x+4)}-\sqrt{(x+5)(x-3)}-(x+5)=0$$

$$\sqrt{(x+5)}(\sqrt{(3x+4)}-\sqrt{(x-3)}-\sqrt{(x+5)})=0$$

$$\sqrt{(x+5)}=0;$$

$$\sqrt{(3x+4)}-\sqrt{(x-3)}-\sqrt{(x+5)}=0$$

Ahora si puede continuar con el algoritmo usual, pero con expresiones menos complejas, lo invitamos a que concluya el ejercicio.

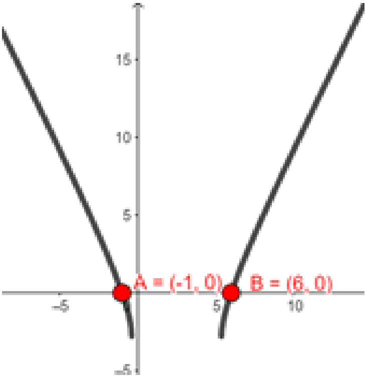


Figura 8.8

Ejemplo 7. Resolver la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x - 2} = 5$$

Para que "desarrolle su visión algebraica" observe que realizando una elemental operación matemática con las expresiones subradicales y el correspondiente cambio de variables, podrá obtener nuevas ecuaciones más simplificadas, hecho esto la solución del ejercicio resulta evidente; en Figura 8. 8 se muestra el gráfico correspondiente a la ecuación estudiada.

8.3. Inecuaciones irracionales

Reciben el nombre de inecuaciones irracionales las que contienen una incógnita (o bien una expresión racional algebraica de la incógnita) bajo un signo radical.

Para hallar el conjunto solución de estas inecuaciones, generalmente se hace necesario elevar ambos miembros de la inecuación a un exponente natural con el propósito de simplificar los radicales, en esto se parece a la vía de solución de las ecuaciones irracionales, pero en la solución de inecuaciones irracionales tal proceso es mucho más complejo, por eso no es frecuente que se trate en los textos ni en los cursos de nivel medio y raras veces aparecen en los exámenes de ingreso a las universidades.

La primera de tales diferencias se da cuando se elevan ambos miembros de una ecuación o de una inecuación irracional a una potencia natural:

En las ecuaciones:

No interesa investigar si se obtiene o no una ecuación equivalente, porque:

Al ser finito el número de raíces de la ecuación resultante, es posible elegir en el conjunto solución obtenido las que sean solución de la ecuación original, por la sencilla vía de sustituir sus valores en la referida ecuación.

En las inecuaciones:

No resulta fácil comprobar al final si las soluciones encontradas son o no soluciones de la inecuación original porque:

El conjunto solución de las inecuaciones por regla general es un conjunto infinito y por lo tanto no es posible aplicar el procedimiento que tanto resuelve en la solución de ecuaciones.

El segundo gran problema se da con el índice de los radicales involucrados en la inecuación porque:

Si se elevan ambos miembros de una inecuación a una **potencia impar**,

entonces

se obtiene una **inecuación equivalente** a la original.

Si se elevan ambos miembros de la inecuación a una **potencia par y ambos miembros de la inecuación original no son negativos**

entonces

se obtiene una **inecuación equivalente** a la original que tiene el mismo sentido de la desigualdad

Ejemplo 8. Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}>1$$

a) Determinar el dominio de la inecuación, esto es fundamental para tener siempre presente en qué conjunto debe encontrarse la solución de la inecuación:

En este caso el primer radical exige que $x \geq 5$ y el segundo exige que $x \leq 9$

Es decir, Dom: $x \in [5; 9]$

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}>1+\sqrt{9-x}$$

b) Los dos miembros de esta inecuación no son negativos

¿Puede el lector Justificar esta afirmación?

Si no puede responder analice el gráfico de la Figura 8.9, ahí está la respuesta

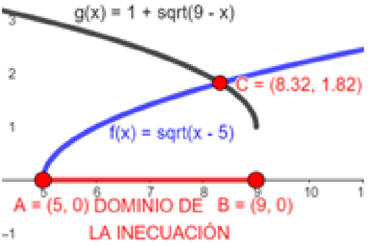


Figura 8. 9

Como se deben elevar ambos miembros a una potencia par, lo anterior justifica que se va obtener una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad.

c) $\boldsymbol{x-5} > 1 + 2\sqrt{\boldsymbol{9-x}} + (\boldsymbol{9-x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{2x-15} > 2\sqrt{\boldsymbol{9-x}}$

d) Ahora hay que realizar un análisis más detallado, porque 2x-15 puede ser positivo o negativo.

a. Si 2x-15≤0⇔x≤$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$, entonces el primer miembro de la desigualdad es negativo o igual a cero y el segundo miembro es no negativo. Por eso, para ningún x∈[5; $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$] se satisface la desigualdad original.

b. Si 2x-15>0⇔x>$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$, entonces ambos miembros de la desigualdad son no negativos y después de elevarlos al cuadrado se obtiene una inecuación equivalente a la desigualdad original.

$$(2x-15)^2 > 4(9-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 60x + 225 > 36 - 4x$$
$$4x^2 - 56x + 189 > 0$$

Ya se cayó en una expresión cuadrática cuyos ceros son

$$\left\{x = \frac{1}{2}(14-\sqrt{7}); x = \frac{1}{2}(14+\sqrt{7})\right\}$$
$$\{\mathrm{x} = 5{,}67712;\ \mathrm{x} = 8{,}32288\}$$

Solución S={x∈ℝ:x<5,67712 o x> 8,32288}

e) Se debe retornar al dominio de la inecuación y la condición (x>$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$) bajo las cuales se obtuvo la inecuación $4x^2$-56x+189>0

Para precisar la solución, es conveniente analizar el gráfico de Figura 8.10. Obsérvese que la curva $f(x) = \sqrt{\boldsymbol{x-5}}$ (azul) se encuentra por encima de $g(x)=1+\sqrt{\boldsymbol{9-x}}$ (negro) en el intervalo]8,32288;9] que es el mismo marcado por el segmento $\overline{EB}$, entre los puntos E=(8,32;0)

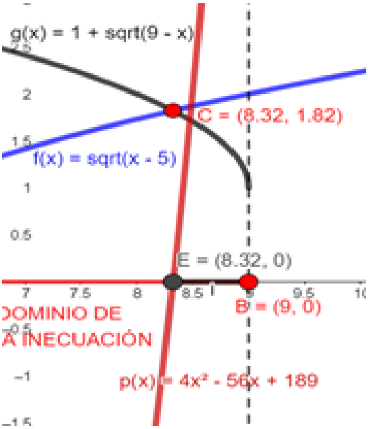


Figura 8.10

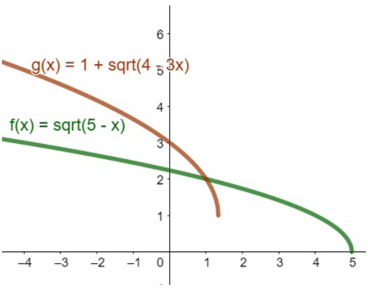


Figura 8. 11

y B=(9;0), el primero determinado por una solución de $4x^2-56x+189>0$ y el segundo por el extremo del dominio de la inecuación.

Solución

S={x∈ℝ:8,32288<x≤9 }=x∈]8,32288;9]

Un segundo ejemplo es necesario

Ejemplo 9. Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{5-x} \leq 1+\sqrt{4-3x}$$

a) Determinar el dominio de definición de la inecuación:

Dom: $x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{4}{3}; x \in \left[-\infty\, ;\, \frac{4}{3}\right]$

En este dominio ambos miembros de la inecuación son no negativos

Verifique que este es el dominio de definición de la inecuación y que la afirmación hecha es cierta.

b) Elevando al cuadrado bajo las condiciones analizadas se tiene:

$$5-x \leq 1+2\sqrt{4-3x}+4-3x \Leftrightarrow x \leq \sqrt{4-3x}$$

c) Ahora el primer miembro de la inecuación puede ser positivo o negativo, eso conduce a una diferenciación de casos:

a. Si x<0 la inecuación $x\leq\sqrt{4-3x}$ se satisface para todos los valores, es decir las soluciones en el intervalo]-∞ ; 0[están en el dominio determinado.

b. Si $0\leq x \leq \frac{4}{3}$, entonces ambos miembros de la inecuación son no negativos y al elevar al cuadrado se obtiene una inecuación equivalente $x^2\leq 4 -3x \Leftrightarrow x^2-4+3x<0$ cuya solución es:

$-4 \leq x \leq 1; x \in [-4\ ;1]$ compruebe esta solución.

d) Uniendo las soluciones de los dos casos se llega como solución general a: S=]-∞ ;1] Comprobemos que no hay errores en esta solución.

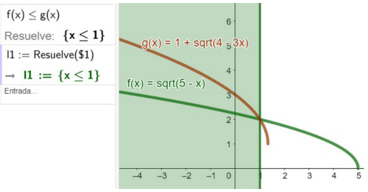


Figura 8. 12

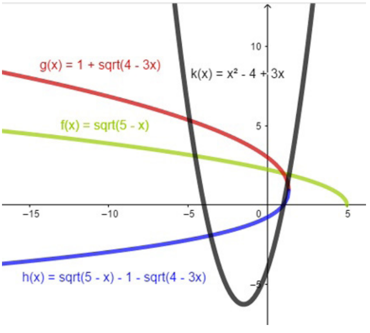


Figura 8.13

En Figura 8.12 se muestra la solución que da GeoGebra con la opción de cálculo simbólico.

Observe:

a) La coincidencia o no de las soluciones obtenidas por la vía utilizada con las que se hubiera obtenido de no haber hecho una diferenciación de casos y se hubiera elevado mecánicamente al cuadrado ambos miembros de la inecuación. Compruébelo usted.

b) De no haber coincidencia entre ambas vías propuestas en (a), entonces:

   a. ¿Se hubieran perdido soluciones?

   b. ¿Se hubieran dado soluciones extrañas?

c) En el gráfico adjunto se pueden observar las gráficas de las dos funciones f(x)=$\sqrt{5-x}$ y

d) $g(x)$=1+$\sqrt{4-3x}$, así como el comportamiento de una sobre la otra como lo expresa la inecuación; expresada en la función $h(x)$= $\sqrt{5-x}-1-\sqrt{4-3x}$;finalmente se muestra el gráfico de la función $k(x)$=x^2-4+3x que es el resultado de las sucesivas transformaciones de la inecuación original para encontrar la solución final. Después de esta explicación del gráfico, compare el conjunto solución de la inecuación y el proceso seguido con lo que ilustra en el gráfico.

Ejercicios y problemas propuestos

VIII.1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

j) $6-5x+x^2=\sqrt{2}\sqrt{-12+x+x^2}$

k) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}+1=0$

l) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}=\sqrt{2x-3}$

m) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

n) $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}=24$

Sugerencia: agrupe y haga un cambio de variable

VIII.2. Sean las funciones:

$f(x)=\sqrt{3x^2-13x+4}$ y $h(x)=x-4$

a) Determina el dominio de f.

b) Calcula las coordenadas de los puntos de intersección de los lados gráficos de las funciones f y h.

VIII.3. Sea: $f(x) = \sqrt{x+1}$

Halla todos los valores de t para los que se cumple $f(2t)-f(t-1)=f(t-4)$.

VIII.4. Si la función definida por $f(x)=\frac{1}{2}x+5$ Halle los valores de x para los cuales se cumple: $f(x)=\sqrt{2f(x)-1}$

VIII.5. Resuelve:

$$\sqrt{x+1}+\frac{13}{\sqrt{x+1}}=6\ (x>-1)$$

VIII.6. Dadas las expresiones:

$A=\sqrt{36-x^2}\,y$ y $B=\sqrt{x^2-3x-28}$.

Determina para qué valores de x están definidas simultáneamente ambas expresiones.

VIII.7. Halla los valores de x tales que

$$f(x) = \sqrt{\frac{10-f(x)}{3}}$$

siendo.f(x)=3x-4

VIII.8. Resuelve la ecuación:

$$\sqrt{\sqrt{12x} + x} = 3$$

VIII.9. Sean las funciones f y g:

$$f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}+2x+1}{x+2} \qquad g(x)=x$$

a) Halla el dominio de la función f.

b) Encuentra los valores reales de x para los cuales se cumple la ecuación

f(x)= g(x).

VIII.10. Dadas las funciones f y g definidas por

$f(x) = \sqrt{6-4x}$ y $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + x + 3}$

a) Halla el dominio de la función f.

b) Determina los valores reales de x tales que f(x) – g(x) = 0

VIII.11. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones donde un cambio de variable puede ayudar a encontrarlo.

a) $3x^2 + \sqrt{x^2+5x+2} = 46 - 15x$

b) $x^{\frac{4}{3}} + 5\sqrt[3]{x^2} = 126$

c) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$

VIII.12. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)} = k$

b) $x^4 - px + q = x^2(2x - p - 1)$

Sugerencias:

Pruebe primero que la ecuación se corresponde con una ecuación recíproca de cuarto grado con coeficientes (k-1) y (k+1), después aplique el método de solución de este tipo de ecuaciones.

Haga un arreglo de los términos de tal forma que pueda hacer el siguiente cambio de variable

y=x(x-1).

VIII.13. Resuelva las siguientes ecuaciones:

d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$

e) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$

f) $\sqrt{1 - 6x + 5x^2} - \sqrt{-3 + 2x + x^2} = x - 1$

g) $\sqrt{x^2 + 7x + 7} + \sqrt{x^2 + 7x - 9} = 8$

h) Resuelva la siguiente ecuación:

$x^4+2(m-1)\, x^3-(5m-1)\, x^2+2(m^2+1)x-m=0$

VIII.14. Hallar las raíces reales de las siguientes inecuaciones irracionales. Precise bien el dominio y téngalo presente al dar la respuesta final. No se precipite.

a) $\sqrt{x^2 - 4} \geq \sqrt{2x + 4}$

b) $x + 1 \geq \sqrt{x + 3}$

c) $x \leq \sqrt{2 - x}$

d) $\sqrt{(x - 3)(2 - x)} > \sqrt{x^2 + 12x + 11}$

e) $\sqrt{x^2 - 4} \geq \sqrt{2x + 4}$

f) $x + 1 \geq \sqrt{x + 3}$

g) $x \leq \sqrt{2 - x}$

h) $\sqrt{(x - 3)(2 - x)} > \sqrt{x^2 + 12x + 11}$

i) $\sqrt{1 - x} \leq \sqrt[4]{5 + x}$

j) $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$

k) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\geq 1$

l) $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\geq 0$

m) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

n) $\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}$

CAPÍTULO IX.
LA FUNCIÓN MODULAR

"Todo número real tiene exactamente un módulo, por lo que la relación que a cada número real le hace corresponder su módulo, es una función, a la cual se le llama función modular, función módulo o función valor absoluto".

(Ochoa Rojas, 2008)

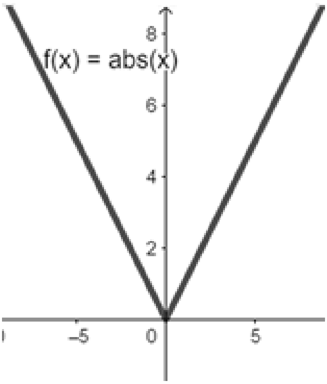


Figura 9.1

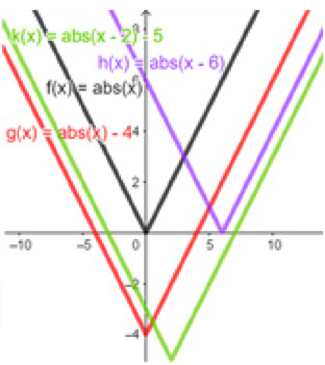


Figura 9.2

9.1. Funciones modulares

La función modular fue definida en el epígrafe 2.1.3, donde se dieron sus propiedades fundamentales, pero este capítulo se orienta principalmente a las propiedades de la función modular y a la solución de ecuaciones e inecuaciones que contienen una incógnita bajo el símbolo de módulo; recordemos la definición:

El valor absoluto de un número x (se designa por |x|)y se define del siguiente modo:

$$|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ 0, si\ x = 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$$

A la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:$f(x)=\lfloor x \rfloor, \forall\ x \in R$ se llama función modular y su gráfico tiene similitudes con el de la función cuadrática (Figuras 9.1 y 9.2) y con sus propiedades que se pueden inferir del gráfico:

a) Dom f: $\mathbb{R}$

b) Im f: $\mathbb{R}_+$

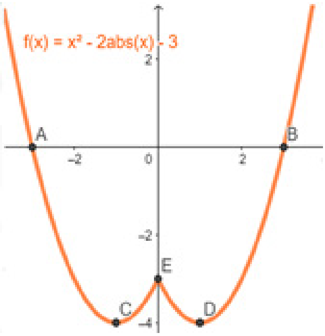


Figura 9. 3

$f(x) = x^2 - 2\,|x| - 3$

Raíces(f, −3.67, 15.81)
→ A = (-3, 0)

→ B = (3, 0)

Extremo(f, −3.67, 15.81)
→ C = (-1, -4)

→ D = (1, -4)

E = Interseca(f, EjeY, (0, −3))
→ (0, -3)

Figura 9.4

c) Mínimo global: 0

d) La función módulo corta el eje y en el punto (0;0)

e) En x=0 la función módulo tiene un cero.

f) Como |x|≥0 f no es negativa en ningún punto

1. La función es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

La función cumple otras propiedades, pero estas son las más significativas.

Para la resolución de problemas son útiles las siguientes propiedades:

Para cualquier número real a, b se cumple:

$$\lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$$

$$\lfloor a - b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$$

$$\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\lfloor a \rfloor}{\lfloor b \rfloor} \ (b \neq 0)$$

Precisada la definición de función modular y sus propiedades pasemos a la resolución de ecuaciones:

9.2. Ecuaciones con módulos

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación

x^2-2|x|-3=0

Solución:

Siguiendo la definición de la función para "liberar del módulo" la variable se tiene:

$$x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \; si \; x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Estas condiciones plantean resolver dos ecuaciones cuadráticas:

$x \geq 0$	$x < 0$
$x^2-2x-3=0$	$x^2+2x-3=0$
Resolviendo estas ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:	
{{x→-1},{x→3}}	{{x→-3},{x→1}}
Escogiendo de cada condición la solución que se corresponda con ella se tiene:	
{x→3}	{x→-3}
Solución final: S= {-3; 3}	

En Figuras 9.3 y 9.4 se muestran el gráfico y los puntos más significativos de la ecuación planteada. A partir del gráfico se pueden establecer las propiedades de la función:

a) Dom f: $\mathbb{R}$

b) Im f: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$

c) Los mínimos se encuentran en:{(-1,-4),(1,-4) }

d) La función corta el eje y en el punto (0; -3)

e) En x=-3 y x=3 la función tiene ceros.

f) La función es negativa en $\{x \in (-3; 3)\}$

g) La función es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

En el gráfico de Figura 9.5 aparecen superpuestos los gráficos de las funciones

$f(x)= x^2-2x-3$y $g(x)=x^2+2x-3$

Compare el comportamiento de estas funciones con el gráfico anterior Figura 9.4, particularmente observe las partes son comunes

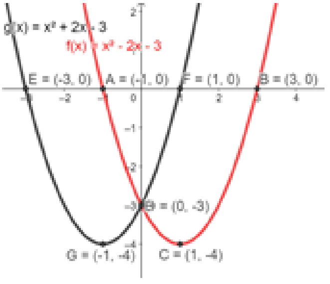


Figura 9.5

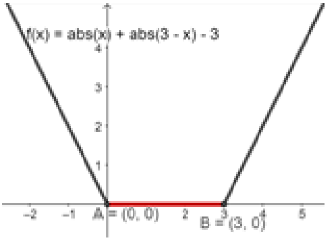


Figura 9.6

$f(x) = 0$

$\rightarrow \ |x| + |x-3| - 3 = 0$

$1

Resuelve: $\{x = 0, x = 3, 0 \leq x < 3\}$

Figura 9. 7

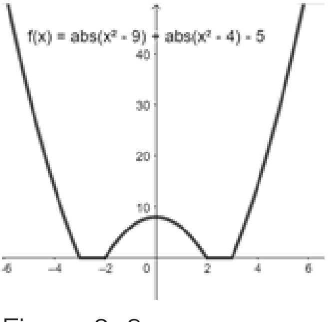


Figura 9. 8

en cada gráfico. Analice las soluciones de las dos ecuaciones obtenidas en el proceso de solución y la decisión de desecharlas, pero ahora justifique esta decisión apoyado en el comportamiento del gráfico.

Ejemplo:

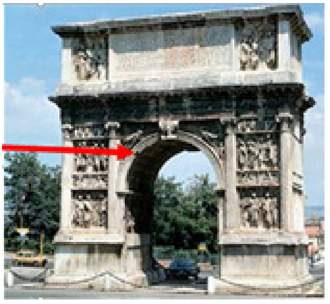
Hallar el conjunto solución de la ecuación|x|+|3-x|=3

Solución:

En este caso hay que "liberar del módulo" más de una expresión, la cantidad de combinaciones para analizar el comportamiento de la variable aumenta, mientras para la primera expresión hay que considerar x≥0 o x<0, en la segunda el análisis es x≥3 o x<3, de modo que para x≥3 y x< 0 ambas expresiones tienen igual comportamiento respecto al signo, pero para el intervalo 0 ≤ x < 3 el comportamiento es: x ≥ 0 y 3-x <0, por lo que habrá que resolver 3 ecuaciones.

El proceso parece complicado pero con organización no debe presentar dificultades, el algoritmo es análogo al de la inecuaciones fraccionarias, consiste en determinar intervalos según los valores que anulan cada expresión afectada por módulos, "liberar del módulo" las respectivas expresiones según el comportamiento en cada intervalo, determinar el conjunto solución de las ecuaciones que se obtengan bajo las condiciones de cada intervalo y finalmente unir las soluciones como expresión del conjunto solución de la ecuación.

Observe la similitud de esta gráfica con el siguiente monumento en forma de arco.



Para el ejemplo que se analiza se tienen dos ceros: $x=0$ y $x=3$, de ahí los intervalos que se muestran en la tabla, donde se han mantenido de la tabla de inecuaciones fraccionarias el análisis del signo de los binomios en cada intervalo, que puede servir de guía en el momento de “liberar del módulo”, pero puede omitirse.

$x<0$		$0 \leq x \leq 3$	$x>3$
x	-	+	+
$3-x$	+	+	-
Liberando del módulo según la definición dada de valor absoluto:			
$-x+(3-x)=3$		$x+(3-x)=3$	$x+(-(3-x))=3$
Resolviendo las ecuaciones			
$-x+3-x=3$ $-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ $S=\emptyset$ Por no cumplir condiciones definidas en el intervalo $x<0$		$x+3-x=3 \Leftrightarrow 0=0$ $S=[0\ ;3\ ]$ Porque se trata de una identidad, al satisfacerse para todos los valores de x	$x-3+x=3$ $2x=6 \Leftrightarrow x=3$ $S=\emptyset$ Por no cumplir condiciones definidas en el intervalo $x>3$
Solución final		$S=[0\ ;3\ ]$	

El gráfico que se adjunta (Figura 9.6) ilustra y confirma el resultado calculado. La gráfica se ha coloreado y dibujado más gruesa para destacar que en el intervalo entre 0 y 3 la gráfica coincide con el eje de las abscisas. En la figura 9.7 se muestra el resultado del cálculo mediante CAS (Cálculo Simbólico) que ofrece el GeoGebra.

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación

$|x^2-9|+|x^2-4|=5$

Se puede comenzar por determinar los ceros de los componentes afectados en expresiones modulares: $x_1=-3$; $x_2=3$; $x_3=-2$; $x_4=2$ pero es más "cómodo" en este caso hacer un cambio de variable $y = x^2$ se tiene $|y -9|+|y-4|=5$ y se continúa con la tabla ya referida.

<table>
<tr><td colspan="2">$y< 4$</td><td>$4 \leq y \leq 9$</td><td>$y>9$</td></tr>
<tr><td>x^2-4</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>x^2-9</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="4">Liberando del módulo según la definición dada de valor absoluto:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-y+9-y+4=5$</td><td>$-y+9+y-4=5$</td><td>$y-9+y-4=5$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Resolviendo las ecuaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-2y=-8\Leftrightarrow y=4$

$S=\emptyset$ Por no cumplir condiciones definidas en el intervalo $x<4$</td><td>$5=5$

$S=[4 \ ;9 \ ]$ Porque se trata de una identidad, se satisface para todos los valores de x</td><td>$2y=8\Leftrightarrow y=4$

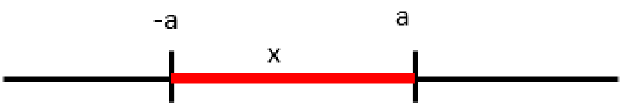
$S=\emptyset$ Por no cumplir condiciones definidas en el intervalo $y>9$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Queda entonces la siguiente desigualdad $4\leq x^2\leq 9$ que hay que resolver.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x^2-4\geq 0$</td><td>y</td><td>$x^2-9\leq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x\leq -2$ o $x\geq 2$</td><td>y</td><td>$-3\leq x\leq 3$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Solución final:</td></tr>
<tr><td colspan="4">$-3\leq x\leq -2$ o $2\leq x\leq 3$

$S=[-3 ; -2]\cup[2 ;3]$</td></tr>
</table>

9.3. Inecuaciones con módulos

Antes de comenzar con el estudio de las inecuaciones con módulos son importantes y prácticas las siguientes observaciones:

i. $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ Esto es, "x" está entre "-a" y "a"



ii. |x|>a ⟺x<-a o x>a Quiere decir que “x” es menor que “-a” o mayor que “a”, en otras palabras “x” tomas cualquier valor excepto de los comprendidos entre “–a” y “a”(-a≤x≤a)

iii. $\sqrt{x^2} = |x|$

La solución de inecuaciones con módulos se combina los conocimientos de solución de ecuaciones con módulo y la resolución de inecuaciones. El proceso resulta fácil siempre que se organice el trabajo como se ha propuesto.

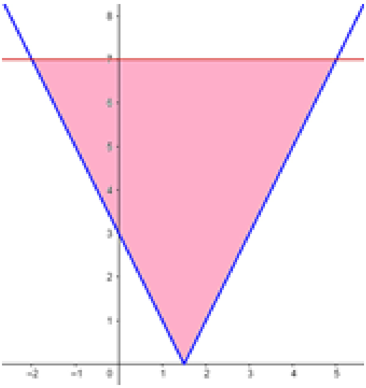


Figura 9. 9

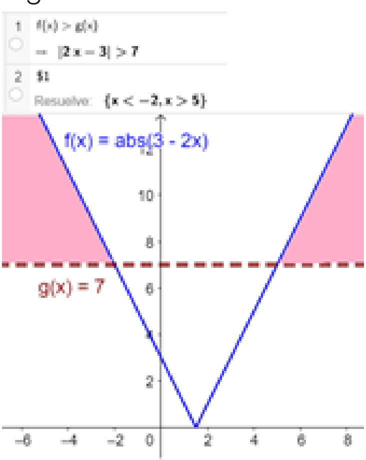


Figura 9. 10

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación |3-2x|<7

Según lo planteado en (i) |3-2x|<7⟺-7<3-2x<7

3-2x>-7 -2x>-10 x<5	y	3-2x<7 -2x<4 x>-2
Respuesta final:	-2<x<5 S=]-2 ;5 [	

En Figura 9. 9 se muestra la sección del plano limitada por las funciones f(x)=|3-2x| y g(x)=7 la cual representa lo expresado en la inecuación resuelta. Aplicando (ii) y el ejemplo anterior, halle el conjunto solución de la siguiente inecuación |3-2x|>7.

En figura 9. 10 se muestra la solución que devuelve GeoGebra (CAS) y el gráfico correspondiente.

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación

$|3x-1|-|6x+2|+|x-4|>0$

Los ceros de las funciones $y=3x-1$, $y= 6x+2$,$y=x-4$ son: $x1= \frac{1}{3}$; $x_2=-\frac{1}{3}$; $x_3= 4$ Siguiendo el esquema se tiene la tabla

$x<-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \leq x < 4$	$x\geq 4$
$3x-1$	-	-	+	+
$6x+2$	-	+	+	+
$x-4$	-	-	-	+
Liberando módulos y resolviendo ecuaciones				
$-(3x-1)-(-(6x+2))$ $+(-(x-4))>0$		$-(3x-1) -(6x+2)$ $+(-(x-4))>0$	$(3x-1) -(6x+2)$ $+(-(x-4))>0$	$(3x-1) -(6x+2)$ $+(x-4)>0$
$7+2x<0\Leftrightarrow$ $x>-\frac{7}{2}$		$10x<3\Leftrightarrow$ $x<\frac{3}{10}$	$4x<1\Leftrightarrow$ $x<\frac{1}{4}$	$7+2x>0$ $\Leftrightarrow x>-\frac{7}{2}$
Solución satisface condición.		Solución satisface condición.	Solución no satisface condición.	Solución no satisface condición.
Solución final:		$-\frac{7}{2}<x<\frac{3}{10}$		

El gráfico adjunto en Figura 9. 11 como es costumbre, representa la función que define la inecuación analizada, el intervalo solución de la inecuación es donde la función se encuentra por encima del eje de las abscisas.

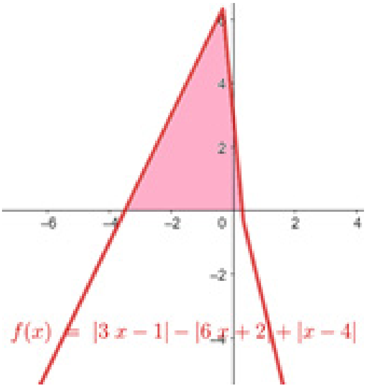


Figura 9. 11

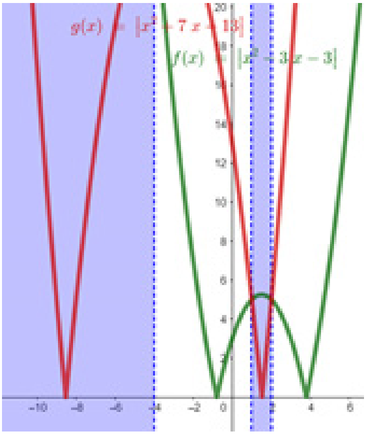


Figura 9. 12

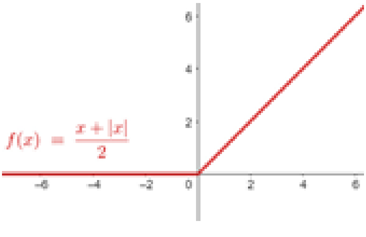


Figura 9. 13

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$ lo planteado en (iii) se tiene que:

$\sqrt{(x^2-3x-3)^2} > \sqrt{(x^2+7x-13)^2}$ por lo que:

$$(x^2-3x-3)^2 > (x^2+7x-13)^2$$

$$(x^2-3x-3)^2 - (x^2+7x-13)^2 > 0$$

Como la expresión anterior es una diferencia de cuadrados se descompone en:

$$[(x^2-3x-3)+(x^2+7x-13)][(x^2-3x-3)-(x^2+7x-13)]>0$$

$$2(x^2+2x-8)10(x-1) < 0$$

Lo que equivale a:

$(x-4)(x-2)(x-1)<0$

La desigualdad obtenida se resuelve sin dificultad dando como resultado como conjunto solución:

S=]-∞,-4[∪]1,2[.

Vea solución gráfica en figura 9. 12.

Problema propuesto.

En la definición de límite de una función, que corresponde a la llamada Matemática Superior, se aplican desigualdades con módulos. Este importante concepto matemático se define del siguiente modo:

La función ftiende hacia el límite len a significa: para todo $\varepsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que, para todo x, si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Transforme esta definición "liberando

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 9. 13

Oliver Heaviside: (1850-1925) Físico, ingeniero eléctrico, radiotelegrafista y matemático inglés. Con gran experiencia práctica como operador de telégrafo; nunca recibió una educación formal, pero emprendió una labor de autoeducación en ciencia y matemáticas, con la cual adquirió puntos de vista muy personales sobre cómo se debía proceder en el campo de las matemáticas.

"las expresiones modulares ¿verdad que es más comprensible la definición que usted ha encontrado que esta que aparece en todos los libros?

9.4. Algunas funciones derivadas de la función f(x)=|x|

Una de tales funciones es la función rampa definida de la siguiente forma:

$$ramp(x) = \frac{x + |x|}{2}$$

En figura 9. 12 está su gráfico, pero una de las propiedades que tiene esta función es la de ser idempotente, es decir, que la función compuesta consigo misma, es idéntica a la original, compruebe usted esta propiedad utilizando el GeoGebra.

La función rampa se puede expresar también mediante la fórmula ramp(t)=ctH(t) donde c es una constante, t es variable y H(t) es la función de Heavisede definida del siguiente modo:

$$H(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t \geq 0 \end{cases}$$

Esta función se utiliza en estudios de circuitos eléctricos para representar ondas repentinas de corriente eléctrica, o de voltaje, cuando un interruptor se cierra instantáneamente.

Problema propuesto

Compruebe la equivalencia entre las dos definiciones dada de función rampa.

Otra curiosidad relacionada con la

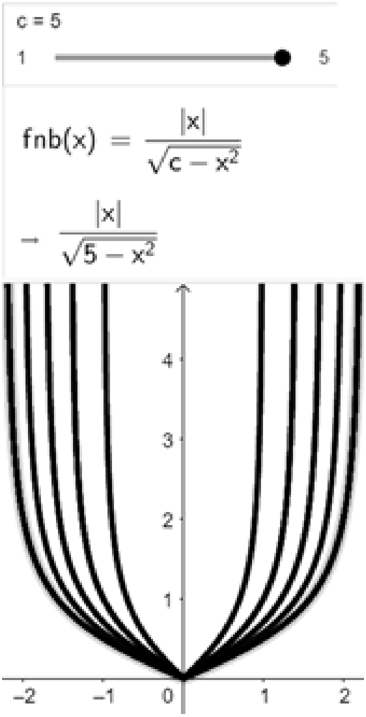


Figura 9. 14

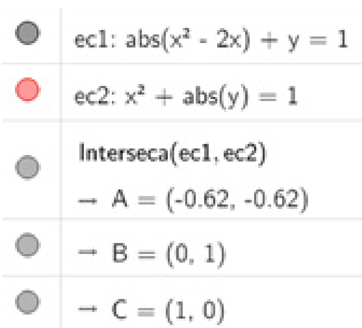


Figura 9. 15

función valor absoluto es la llamada curva nariz de bala que responde a la función $fnb(x) = \frac{|x|}{\sqrt{c-x^2}}$ cuyo gráfico de una familia de tales funciones aparece en figura 9. 14.

Esta familia de funciones está determinada por un deslizador donde c toma valores entre 1 y 5.

Problema propuesto

¿Qué le sucede a la función al crecer el valor del parámetro c?

9.5. Sistemas de ecuación con funciones modulares

Sea el sistema

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + |y| = 1 \end{cases}$$

Al eliminar los módulos se obtiene las siguientes combinaciones de variantes posibles:

a) $x^2-2x\geq 0$,$y\geq 0$

b) $x^2-2x\geq 0$,$y<0$

c) $x^2-2x<0$,$y\geq 0$

d) $x^2-2x<0$,$y<0$

Analizando cada una de las variantes se tiene

a) $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$

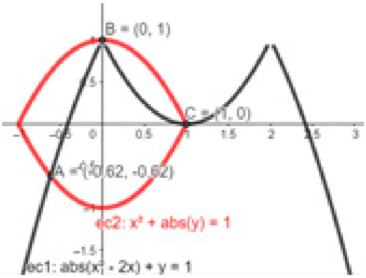


Figura 9. 16

ec1: abs(x² - 2x + 1) - y² = 2

ec2: -(x² - 4) - abs(y) = -2

Interseca(ec1, ec2)

→ A = (-1.87, -2.5)

→ B = (-1.87, 2.5)

→ C = (2.42, -0.14)

→ D = (2.42, 0.14)

Figura 9. 17

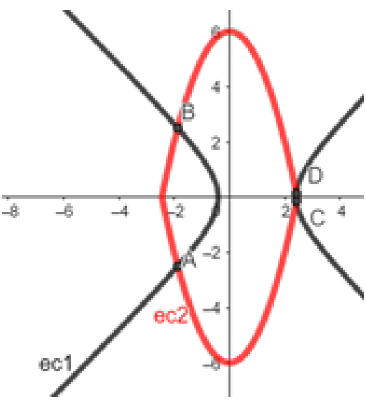


Figura 9. 18

Evidentemente el par (0,1) satisface el sistema.

b) $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones se obtiene

x^2-x=1

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como x^2=1+x sustituyendo en la segunda ecuación se tiene: $y=x$ ⇒

$$y_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Dado que y<0, el par que satisface este sistema es

$$\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)$$

Para la opción c) se tiene

c) $\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 1 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$

Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene: x^2-x=0. De aquí se infiere que el par que satisface este sistema es (1,0).

d) $\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$

Al sumar las ecuaciones se obtiene x=1 por consiguiente y=0 que no satisfacen las condiciones de d; por tanto, las tres soluciones son

$$(0,1), \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right), (1,0)$$

Estas soluciones coinciden con las dadas en las figuras 9.15 y 9.16 utilizando el comando Interseca del GeoGebra

Situación similar sucede con el sistema

$$\begin{cases} |x^2 - 2x + 1| - y^2 = 2 \\ \quad x^2 - 4 - |y| = -2 \end{cases}$$

Resueltos en figuras 9.17 y 9.18.

Ejercicios y problemas propuestos

VIII.15. Resolver las ecuaciones

a) $\lfloor x^2 - x - 6 \rfloor = x + 2$

b) $\lfloor x^2 - x - 6 \rfloor = \lfloor x^2 - 4 \rfloor$

c) $\lfloor x^2 - x - 6 \rfloor - \lfloor x^2 - 4 \rfloor - \lfloor x^2 - 2x - 3 \rfloor = 0$

d) $\lfloor x^2 - 5x - 6 \rfloor - \lfloor x^2 - x - 6 \rfloor - \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor = 0$

e) $|x^2 - 3| + |x^2 - 9| = 6$

f) $|x^2 - 3| + |x^2 + 9| = 12$

g) $|x^2 + 3| + |x^2 + 9| = 12$

h) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$

i) $\lfloor x^2 - 4x + 2 \rfloor - \left\lfloor \frac{5x-4}{3} \right\rfloor = 0$

j) $(1 + x)^2 - |1 - x^2| = 0$

VIII.16. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x^3 - 1| \leq x^2 + x + 1$

b) $x^2 + x - |3x + 2| + x^2 + 1 - |x - 3| < 0$

c) $x^2 + 2x + 12 - |3x^2 + 2| + (x^2 - 1) - |(x^2 - 3)| < 0$

d) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| \leq 3$

e) $\left||x-1|-1\right| \geq 1$

f) $|x^2+x| \leq 1$

g) $x^2+6 \geq 5|x|$

VIII.17. Resuelva y grafique el sistema

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$$

CAPÍTULO X.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FUNCIONES, ECUACIONES, INECUACIONES O SISTEMAS ALGEBRAICOS

"Un problema es tener un hermanito" (Preescolar 3 años (P3)) "Un problema es que María se haga pipi encima"(P4). "Es una pregunta que tienes que pensar con la cabeza" (1º)

(Díaz Godino, et al., 2003)

PINCELADA HISTÓRICA

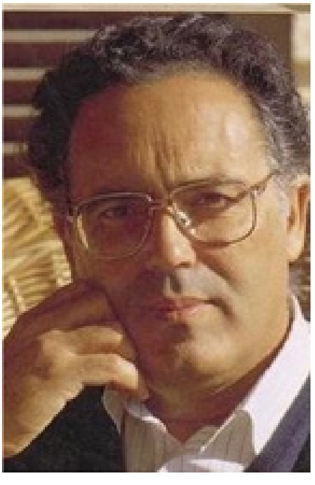


Figura 10. 2

Miguel de Guzmán Ozámiz. (1936-2004). Matemático español. Catedrático de Análisis de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de la Real Academia de Ciencias

10.1. ¿Qué es un problema?

Dar una definición de problema en Matemática o escoger una de las varias que existen resulta difícil, hasta Polya evadió esta tarea cuando escribió su primer libro sobre la resolución de problemas, pero en 1992 dijo: ***"Problema es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"***. (Polya, 1962)

Otros autores han abordado el problema del siguiente modo: *"Es una pregunta a la que es imposible dar respuesta. Esta pregunta determina toda la actividad posterior del sujeto dándole un carácter selectivo".* (Luria, 1981).

"Una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla". (Schoenfeld, 1985)

Problema es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para

Exactas, Físicas y Naturales desde 1982, miembro de la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina desde 1985. Del 91 al 98, fue presidente de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

Obtuvo la licenciatura en Filosofía en el Berchmans-kolleg de Munich (Alemania) en 1961, se licenció en Matemáticas y en Filosofía en la Universidad Complutense en 1965. Se doctoró en la universidad de Chicago de la mano de Alberto Calderón en 1968. Regresó a la universidad Complutense en 1968, obteniendo el título de doctor por esta universidad ese mismo año, donde impartió clases hasta su muerte. Fue profesor en las universidades de Chicago, San Luis, Princeton y Brasil.

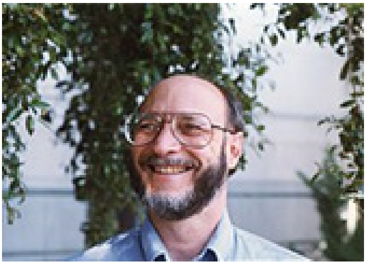


Figura 10. 3

Alan Schoenfeld (New York 9 de julio de 1947)

lograr una meta claramente concebida Una situación desde la que se quiere llegar a otra y no se conoce el camino que puede llevar de una a otra (Miguel de Guzmán, 1994).

Los autores consideran que la siguiente definición sea lo suficientemente completa para el lector más exigente, al respecto su autor dice que problema es *"una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias".* (Alonso, 2001)

De esta definición es digno de destacar algunos aspectos que tienen incidencia en el alumno que se enfrenta a un problema:

1. Para que una situación matemática represente un problema para un individuo, ésta debe contener una dificultad intelectual y no sólo operacional o algorítmica.

De ahí que no todos los ejercicios sobre funciones, resolución de ecuaciones, de inecuaciones, o sistemas de ecuaciones que se han planteado en este texto constituyen problemas porque generalmente el alumno tenía la información necesaria acerca del algoritmo que debía seguir para

Al terminar de estudiar Matemática pura, se encontró con el primer libro de Pólya, el cual le interesó muchísimo y empezó a investigar sobre los motivos de la ausencia de estos trabajos durante la enseñanza, y se encontró con que algunos miembros de la Facultad en realidad no lo conocían y otros que no creían en lo que Pólya proponía. Esto lo llevó a averiguar más y se dio cuenta, que los profesores que preparaban a los estudiantes para olimpiadas, si conocían sobre Pólya, pero no lo utilizaban porque decían que no funcionaba, aunque nunca lo habían utilizado.

En 1985 Schoenfeld publicó su libro Mathematical. Problem Solving y hoy es el principal exponente de la Resolución de Problemas en la Educación Matemática. Fue presidente de la American Educational Re-search Association y vice-presidente de la National Academy of Education (EEUU). También es el autor principal para los años 9 a 12 de los Principios y Estándares en la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics de los Estados Unidos. Cuenta con 19 libros publicados y más de 50 artículos.

resolverlo; para los problemas **<u>no existen</u>** algoritmos establecidos para resolverlos, aunque atendiendo algunas reglas se puede encontrar con más facilidad la vía de solución.

2. La persona de manera consciente reconoce la presencia de la dificultad y la situación pasa a ser objeto de interés para la misma, o sea, que exista una **disposición para resolverla.**

Si el alumno no reconoce la dificultad en la situación planteada, no tiene interés o no está dispuesto a resolver el problema, no es posible obtener resultados.

3. **La base de conocimientos** requerida puede estar compuesta por conocimientos y experiencias que se han adquirido y acumulado previamente o puede ser ampliada al abordar el problema, mediante consulta de textos o de personas capacitadas.

Si no se tiene el conocimiento necesario para resolver el problema hay que adquirirlo para poderlo enfrentar; la repetida frase que “a resolver problemas se aprende resolviendo problemas”, es cierta siempre que esto no se haga por repetición o imitación, sino sobre la base del conocimiento, estudio y el análisis fundamentado de las vías seguidas en la solución de cada problema.

4. En todo problema aparece al **menos un objeto,** que puede ser matemático como un triángulo, un número, una función, una ecuación, etc., o puede ser real, como un camino que

enlace dos puntos, un río, un poste, etc. También pueden aparecer objetos de ambos tipos, de todas formas, los objetos reales en el proceso de resolución del problema deben representarse matemáticamente para poder aplicar los métodos de esta ciencia.

Determinar estos objetos y expresarlos en lenguaje matemático (generalmente mediante funciones, ecuaciones, inecuaciones, o sistemas de ecuaciones) es el primer paso en la resolución de un problema.

5. Junto a los objetos, en cada problema suele aparecer una serie de **características** de los mismos, algunas de carácter cuantitativo como longitudes, volúmenes, número de vértices, aristas, etc. y otras cualitativas como el tipo de triángulo (equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo), el tipo de camino (recto, curvo, poligonal), etc. También pueden aparecer **relaciones** entre los objetos, tales como relaciones de distancia, tangencia, semejanza, equivalencia, congruencia, etc.

Además de los objetos es necesario determinar sus características cuantitativas y cualitativas, así como sus relaciones para logar obtener un modelo matemático de la situación que plantea el problema.

Las condiciones del problema son conformadas por algunos objetos, características de estos y relaciones entre los mismos, que son dadas en la formulación del problema. **La exigencia o interrogante** a la cual hay que dar respuesta también se expresa en términos de objetos, características o relaciones.

Ejemplo:

Veamos alguno de los elementos planteados a partir de la definición de problema. Sea el problema:

En un triángulo rectángulo, el punto de intercesión de este con la circunferencia inscrita divide a la hipotenusa en segmentos de longitudes 5,0 cm y 12,0 cm respectivamente. Encontrar las longitudes de los catetos del triángulo.

Condiciones:

Se trata de un triángulo rectángulo. (Objeto)

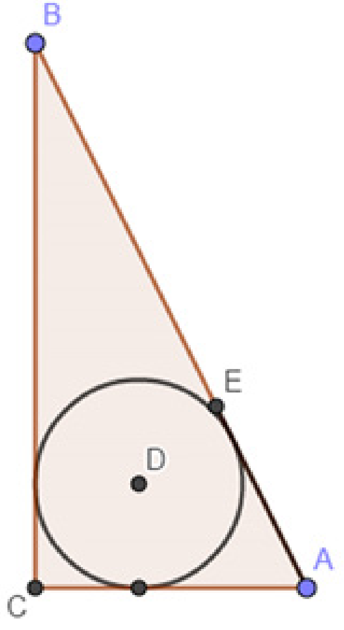


Figura 10.4

- Este triángulo se ha inscrito una circunferencia (características cualitativas)
- El punto intersección de la circunferencia y la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos. (Relaciones entre los objetos)
- La longitud de uno de estos segmentos es 5,0 cm. (Características cuantitativas)
- La longitud del otro segmento es igual a 12,0 cm. (Características cuantitativas)

Exigencias:

- Encontrar la longitud de uno de los catetos del triángulo.
- Encontrar la longitud del otro cateto.

La habilidad para resolver problemas es una de las que se puede enseñar y los alumnos aprender y desarrollarla, resultando básico para los estudiantes porque la deben emplear a lo largo de sus vidas, utilizando la frecuentemente cuando abandonen la escuela.

Una vez precisadas las condiciones del problema, se requiere identificar las exigencias o interrogantes a las que hay que dar respuesta expresándolas en lenguaje matemático.

10.2. ¿Qué es resolver un problema? Y ¿Qué hacer para resolver un problema?

El proceso de resolución de un problema matemático es entendido como toda la actividad desarrollada por la persona que lo aborda. En cuanto a ¿qué hacer para resolver un problema? la respuesta a esta pregunta es realmente compleja, formuladas la pregunta a niños han dado respuestas como los siguientes:

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 10. 5 Muerte de Sócrates

Sócrates: c. 470-399 a.C. Es considerado uno de los más grandes, tanto de la filosofía occidental como de la universal y junto a Platón y a Aristóteles, forman la triada de la filosofía de la Antigua Grecia.

No escribió ninguna obra porque creía que «cada uno debía desarrollar sus propias ideas». Se conocen sus ideas por los testimonios de sus discípulos: Platón, Jenofonte, Aristipo y Antístenes.

Tampoco fundó una escuela regular de filosofía. Todo lo que se sabe con certeza sobre sus enseñanzas se extrae de la obra de Platón, que atribuyó sus propias ideas a su maestro.

Fue acusado falsamente en el 399 a. C. de introducir nuevos dioses y corromper la moral de la juventud, alejándola de los principios de la democracia y condenado a muerte por envenenamiento. Después de beber la cicuta dijo a los amigos que sollozan: "No, amigos; hay que concluir con palabras de buen augurio: permaneced, pues, serenos y fuertes".

- "Estoy callado, luego no veo nada, bueno lo veo todo oscuro...y luego ya me sale la respuesta" (P4)
- "Me fijo mucho y después me sale" (P4)
- "Me meto lo que me dicen en la cabeza, después me lo imagino, veo lo que está pasando y luego ya lo sé" (P5)
- "Pienso, muevo la cabeza y.......ya me sale" (1º)
- "Lo pienso hasta que lo encuentre" (1º)
- "Lo pienso un rato, depende de si el problema es difícil o no. Algunas veces sólo de escucharlo ya sé cómo se hace" (1º)
- "Lo pienso con el cerebro" (1º) (Godino, et al., 2003, p. 45)

Las respuestas pueden resultar simpáticas, pero así piensan muchos alumnos y los docentes deben conocer cómo ellos enfrentan las soluciones de problemas para poder emprender cualquier acción encaminada a orientarlos en la vida para resolver problemas.

Esta pregunta también será hecha los científicos en distintas épocas y también han dado disímiles respuestas, algunas de ellas se exponen a continuación.

Se le atribuye a Pappus de Alejandría (300 d.c.) la propuesta de una rama de estudios denominadas "**analyomenos**", que bien puede traducirse como "el tesoro del análisis" o "el arte de resolver

PINCELADA HISTÓRICA

Figura 10. 6

Platón c. 427-347 a. C.) filósofo griego seguidor de Sócrates y maestro de Aristóteles. En 387 fundó la Academia, institución que permaneció por de más de novecientos años, siendo por ello uno de los filósofos que más ha influido en la Historia del Pensamiento y que mayor incidencia tuvo sobre las concepciones acerca de la realidad matemática, siendo el gran inspirador de casi toda la actividad matemática de su época; en realidad Platón no era matemático, pero su apasionado entusiasmo por la Matemática y su reconocimiento en la importancia que esta ciencia tenía como iniciación de la Filosofía, en la educación e instrucción de la juventud, en el entendimiento del Cosmos y en la formación del hombre de Estado, hizo que se convirtiera en un célebre forjador de matemáticos.

problemas", donde proponía dos estrategias principales para resolver problemas de geometría:

Asumir que la solución está dada y se trabaja "desde atrás" hasta encontrarse con algo ya conocido o que se sabe verdadero.

"Trabajar hacia delante": se empieza considerando el conocimiento matemático (axiomas y teoremas y aprobados) y se trabaja a ser resultado. A estos dos métodos se le denomina análisis y síntesis respectivamente.

Según Shoenfeld (1987), el filósofo griego Sócrates fue capaz de aislar la noción "resolver problemas" para someterla a estudios y junto con Platón dio origen a la denominada o "heurística", sobre este término la enciclopedia Wikipedia expresa: "*La palabra heurística procede del término griego* **εὑρίσκειν**, *que significa «hallar, inventar» (etimología que comparte con eureka). La palabra heurística aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se usa como sustantivo, identifica el arte o la ciencia del descubrimiento, una disciplina susceptible de ser investigada formalmente. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o silogismos y conclusiones heurísticas. Claro está que estos dos usos están íntimamente relacionados ya que la heurística usualmente propone estrategias heurísticas que guían el descubrimiento*". (Fundación Wikimedia, 2020)

PINCELADA HISTÓRICA

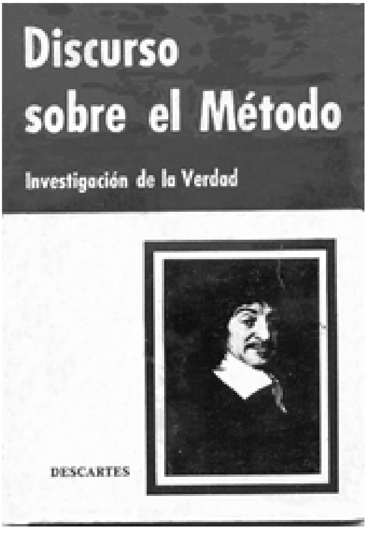


Figura 10. 7

Curiosidades del "Discurso sobre el Método"

Fue publicado de forma anó-nima en Holanda en 1637.

El libro original fue escrito en francés con lo que rompía la tradición de escribir tales tex-tos en latín que era la lengua culta, porque su autor quería que el libro pudiera ser leído por la mayoría de la población, al tiempo que se legitimaba las lenguas vernáculas como adecuadas para expresar las complejidades de la investigación filosófica.

Renato Descartes (1596-1650), filósofo, científico y matemático francés, considerado el fundador de la filosofía moderna da 4 reglas o principios para resolver problemas en su tratado "**Discurso sobre el Método. Investigación de la verdad**"

"*El primero de estos preceptos consistía en no recibir como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal, evitando cuidadosamente la precipitación y los prejuicios, y no aceptando como cierto sino lo presente a mi espíritu de manera tan clara y distinta que acerca de su certeza no pudiera caber la menor duda.*

El segundo, era la división de cada una de las dificultades con que tropieza la inteligencia al investigar la verdad, en tantas partes como fuera necesario para resolverlas.

El tercero ordenar los conocimientos, empezando siempre por los más sencillos, elevándome por grados hasta llegar a los más compuestos, y suponiendo un orden en aquellos que no lo tenían por naturaleza.

Y el último consistía en hacer enumeraciones tan completas y generales, que me dieran la seguridad de no haber incurrido en ninguna omisión.

Esas largas cadenas de razonamientos, tan sencillos y fáciles, de que se sirven los geómetras para sus demostraciones más difíciles, me hicieron pensar que todas las cosas susceptibles de ser

Las ideas de Descartes no agradaron a algunos de sus contemporáneos: Buordin un padre jesuita hizo esfuerzos para que el clero francés rechazara sus doctrina y los protestantes como Gilberto Voetius, rector de la Universidad de Utrecht lo acusó de ateísmo y el senado le ordenó presentarse a defender sus obras que iba a ser quemadas por el verdugo.

Figura 10. 8

Joseph-Louis Lagrange, o Giuseppe Lodovico Lagrangia, (Turín, 25 de enero de 1736 París, 10 de abril de 1813), matemático y astrónomo italiano naturali-

conocidas se relacionaban como aquellos razonamientos, y que con tal no se recibía como verdadero lo que no lo sea y se guarde el orden necesario para las deducciones, no hay cosa tan lejana que a ella no pueda llegarse ni tan oculta que no pueda ser descubierta”. (Descarte, 1990, p. 31)

Leonhard Euler (1707-1783) hizo un meritorio aporte a la resolución de problemas fundamentalmente desde en su praxis pedagógica, según Condorcet[5] “Euler prefería instruir a sus alumnos con la pequeña satisfacción de sorprenderlos.

Él pensaba no haber hecho bastante por la ciencia si no hubiese añadido a los descubrimientos (...) la íntegra exposición de las ideas que le llevaron a ellos”. En su obra no solamente los descubrimientos por analogías son dignos de mencionar, es importante decir que su capacidad de análisis era sorprendente, pero fundamentalmente se distinguió como “el matemático más hábil para la creación de algoritmos y estrategias generales para la solución de problemas, que jamás haya existido”.

J. L Lagrange (1736-1813) Su mayor contribución al estudio de las vías para resolver problemas aparece en las memorias que escribió en Berlín en 1767, “Sobre la resolución de las ecuaciones numéricas”, en la cual se exponen dos estrategias para la resolución de

5 **Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat**, marqués de Condorcet (1743 - 1794), filósofo, científico, matemático, político y politólogo francés.

zado francés, que después de formarse en su Italia natal pasó la mayor parte de su vida en Prusia y Francia. Entre sus contribuciones a la matemática se encuentran: la mecánica Lagrangiana y novedosos trabajos de astronomía; es considerado uno de los físicos y matemáticos más destacados de la historia.

Figura 10. 9

Jules Henri Poincaré (Nancy, Francia, 29 de abril de 1854 París, 17 de julio de 1912), matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia; con razón se ha dicho que el desarrollo de la Matemática en el siglo problemas utilizando como recurso las ecuaciones numéricas simples.

Bernard Bolzano (1781-1848) también intentó encontrar las formas de resolver problemas y en sus notas expresó:

“No pretendo en lo absoluto presentar aquí ningún procedimiento de investigación que no sea conocido desde hace tiempo de los hombres de talento, no creo que encuentren aquí nada nuevo en la materia. Pero voy a esmerarme en asentar, en términos claros, las reglas y los caminos de la investigación seguidos por todo hombre capaz, aunque en la mayoría de los casos lo sigue sin tener plena conciencia de ello. Si bien ignoro si he tenido o no pleno éxito en esta empresa, guardo al menos la ilusión que mi modesta contribución sea del gusto de algunos y tenga aplicaciones más tarde”.

El matemático francés Henry Poincaré (1854-1912) además de sus valiosas contribuciones al desarrollo de la Matemática al explicar el procedimiento demostrativo conocido por inducción completa, también se preocupó por estudiar los procedimientos para resolver problemas y al respecto en “Fundations of Science”, sección “Mathematical Creation”, destaca cuatro fases respecto al acto creativo las que enumera de la siguiente forma:

- **Saturación** (actividad consciente que implica trabajar en el problema hasta donde sea posible);

XIX comienza bajo la sombra de un gigante Carl Friedrich Gauss y termina con un genio de similar magnitud, Jules Henri Poincaré. Ambos fueron matemáticos universales en el sentido máximo y ambos hicieron importantes contribuciones a la Astronomía y a la Física Matemática.

Figura 10.10

Jacques Salomon Hadamard (Versalles, Francia, 8 de diciembre de 1865 - París, 17 de octubre de 1963) matemático francés, trabajó en las universidades de Burdeos y en la Sorbona de París. Sucedió a Henri Poincaré en la Academia de Ciencias de Francia. Sus contribuciones más significativas a la matemática son el teorema de los números

- **Incubación** (el subconsciente es el que trabaja);
- **Inspiración** (la idea surge repentinamente, "como un flash");
- **Verificación** (chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad).

J. Hadamard (1865-1963) En su libro "An essay on the psychology of invention in the mathematical field", publicado en 1945 propone un esquema para explicar el proceso de creación matemática:

- **Documentación** (informarse, leer previamente, escuchar, discutir)
- **Preparación** (realizar un proceso de ensayo–error sobre diferentes vías e hipótesis)
- **Incubación** (al cambiar de actividad)
- **Iluminación** (ocurre la idea repentina)
- **Verificación** (la idea debe someterse al análisis y comprobación, al juicio crítico)
- **Conclusión** (ordenación y formulación rigurosa de los resultados).

Por primera vez se intentaba explorar los fenómenos que ocurren en el cerebro humano, durante la resolución de problemas.

De todas estas tendencias, los autores consideran importante enfatizar en dos aspectos fundamentales.

1. Precisar el significado de las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética con el propósito de

primos y el establecimiento de la noción de problema bien planteado en el terreno de las ecuaciones diferenciales; es también uno de los matemáticos que más han contribuido en el desarrollo del análisis infinitesimal y desarrolló el teorema sobre el valor absoluto de un determinante. Llevan su nombre las matrices de Hadamard, el Teorema de Cauchy-Hadamard y se utiliza en criptografía la pseudo-transformación de Hadamard.

aplicarlas al establecer las **relaciones entre las partes y el todo** que se dan en las condiciones de cada problema y que un tanto esquemáticamente se manifiestan de la siguiente forma:

a) La unión de las partes en un todo se realizan mediante la suma o mediante el producto.

b) La determinación de una parte conociendo el todo y una o varias partes se obtine mediante la resta la división según el caso.

Obsérvese que el establecemiento de las **relaciones entre las partes y el todo** al menos implícitamente establece las relaciones funcionales que se dan entre los componentes estructurales del problema.

Esta sencilla reflexión puede ser el paso inicial para lograr con éxito la identificación de las operaciones artiméticas que deben conducir a la solución de un problema, tarea que en ocasiones le es difícil a más de un alumno y la convierte en “adivinar la operación que se debe realizar”.

2. Emplear uno de los modelos que con probada eficiencia se han venido aplicando a la resolución de problemas y que todos tienen su antecedente en el modelo de Polya.

En 1945 Polya publicó su obra cumbre “How to solve it?” y siguiendo a sus antecesores establece cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y su solución estas son:

1. Comprender el problema.
2. Concebir el plan.
3. Ejecutar el plan y
4. Examinar la solución obtenida.

Observe las similitudes con los planteamientos de Poincaré y Hadamard, pero a diferencia de estos, en cada una de estas etapas Polya propuso una serie de preguntas, para dirigir el proceso de solución de un problema, lo que se puede profundizar en cualquier texto especializado, pero de ellas se analizará someramente la comprensión, porque en ella está la clave de la solución de un problema.

¿Qué es comprender el problema?

La comprensión ha sido caracterizada por Wiltrock (1990), citado por Alonso (2001), como **una representación** estructural o conceptualmente ordenada de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información, esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencias. De aquí que la comprensión de un problema dependa, **ante todo, de la representación** que de éste se haga la persona que trata de resolverlo.

La representación de un problema matemático son las abstracciones de los objetos, características y relaciones que intervienen en el problema que se está resolviendo, las cuales son formadas e integradas sobre la base de los conocimientos (sin conocimientos no es posible resolver problemas) y experiencias adquiridos previamente (sin la experiencia de haberse enfrentado a problemas y haber fracasado al intentar resolverlos, aprendiendo de estos fracaso, no es posible resolver problemas), reflejadas en forma de imágenes y conceptos y manifestadas a través de la expresión oral, símbolos escritos, dibujos o tablas.

La representación es un proceso que **dinamiza el proceso de resolución de problemas matemáticos** dado su carácter mediador en el conocimiento. La misma permite al resolutor dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia.

En el siguiente ejemplo se pondrán de manifiesto algunas de las ideas expuestas en el epígrafe anterior.

Ejemplo:

Se tienen 174 kg de arroz en dos sacos. Del más pesado se extrae el 25 % de su contenido y se echa en el otro, quedando los dos con la misma cantidad. ¿Cuánto pesaba cada saco?

Solución por la vía aritmética.

Aunque este libro trata fundamentalmente de funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones que son tema del Álgebra y el Análisis Matemático , como mucho de los problemas que se plantean tienen solución por la vía aritmética es preciso comenzar por ella; recuérdese que Gauss dijo que la Matemática es la reina de las ciencias y agregó que la Aritmética es la reina de la Matemática; pero en muchas ocasiones se separan ambas vías de solución y cuando los alumnos se enfrenta al Álgebra no se retoma el conocimiento que posee de la solución de problemas de la Aritmética para adaptarlos al nuevo modelo de solución.

Algunas reglas que facilitan la comprensión del problema pueden ser:

a) Establezca la relación parte todo.

b) Exprese el 25% como una fracción para establecer mejor la anterior relación.

c) Mediante un esquema represente el planteamiento del problema.

En cuanto a la relación parte todo se da el todo 174 kg y una parte expresada como el 25%, dato se corresponde con ¼ del total, por tanto, la primera operación aritmética relacionada con este problema es la división.

Un esquema que represente el problema puede ser:

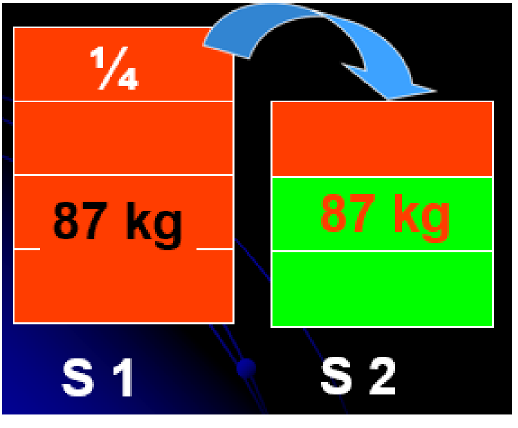


Figura 10.11

Si ambos sacos quedan con la misma cantidad, entonces, al final del proceso quedan $\frac{174}{2}$=87 kg.

De S1 se extrajo el 25%, esto representa la cuarta parte, entonces 87 son los $\frac{3}{4}$ del contenido inicial.

Por su parte S2 alcanzó los 87 kg con sólo la cuarta parte de S1, quiere decir que tenía originalmente el equivalente a la mitad de S1, por lo que "el todo" estaba dividido en 6 partes, 4 estaban en S1 y 2 en S2. El esquema también es ilustrativo de lo antes analizado, por tanto, para una posible solución basta con determinar una de esas seis partes $\frac{174}{6}$=29. Ahora el problema cambió, pues los datos se transformaron y se tiene una sexta parte y la ley de formación del todo en cada uno de los sacos, para S1, 4 de esas partes y para S2 solamente 2, es decir:

$S1=4\times29kg=116\ kg\ y\ S2=2*29kg=58\ kg$

El siguiente esquema sugiere otra solución

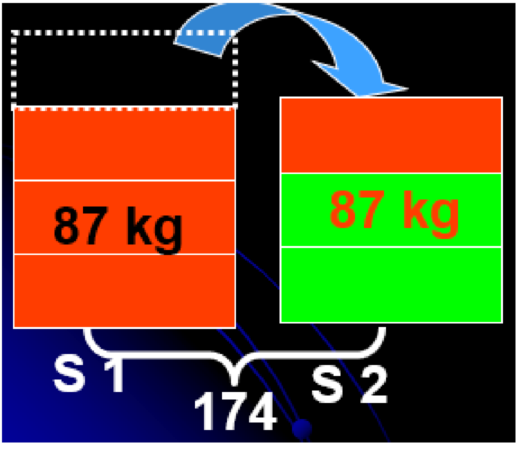


Figura 10.12

El lector puede encontrar la explicación que conducen a los siguientes cálculos:

$$\frac{174}{6}=29$$

$$s1=29\times4=116$$

$$s2=29\times2=58$$

Solución por la vía algebraica mediante una ecuación.

Algunas reglas que facilitan la comprensión del problema por esta vía:

a) Asigne una variable a uno de los elementos desconocidos.

b) Exprese el otro u otros elementos desconocidos en función de esta variable.

c) Exprese mediante una o más ecuaciones las condiciones del problema atendiendo a la relación parte-todo.

d) Resuelva la o la ecuación o ecuaciones.

e) Constate que los resultados son correctos y dé respuesta al problema

Asignemos x al peso en kilogramos de S1.		Se asigna entonces a S2: 174-x
	Como el 25% representa la cuarta parte y esta se extrae de S1, esto se representa como x/4 y con esta codificación puede expresarse mediante una ecuación el texto del problema:	

$$x - \frac{x}{4} = (174 - x) + \frac{x}{4}$$

$$\frac{3x}{4} = 174 - \frac{3x}{4};\ \frac{3x}{2} = 174;\ x = 116$$

Respuesta

S1=116 kg

S2 = 174-116= 58 kg

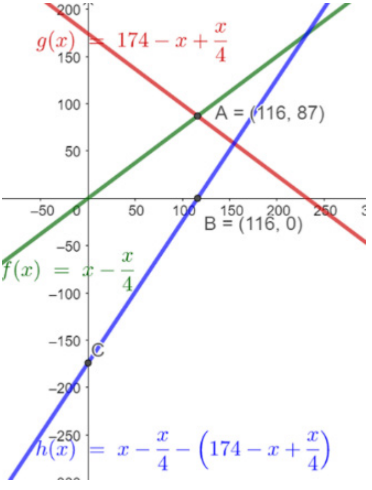


Figura 10.13

Evidentemente la solución de la ecuación es sencilla, pero lo más importante de este problema es constatar que la modelación de su solución consiste en expresar en el lenguaje del álgebra las condiciones del problema.

Utilizando el GeoGebra es posible analizar el comportamiento de las funciones que conducen a la solución del problema como se muestra en las gráficas:

En figura 10.13 se muestran las gráficas correspondientes a las funciones

- $f(x) = x - \frac{x}{4}$
- $g(x) = 174 - x + \frac{x}{4}$
- $h(x) = x - \frac{x}{4} - (174 - x + \frac{x}{4}$

En la referida figura se muestran dos formas de analizar la solución:

1. Expresando el miembro izquierdo (f(x)) y el miembro derecho (g(x)) como dos funciones independientes, encontrando su (sus) punto(s) de intersección, en este caso A=(116;87); en esta gráfica se muestra una idea muy elemental y es que, las soluciones de una ecuación son aquellos valores del dominio de las funciones que

$f(x) = x - \frac{x}{4}$

$g(x) = 174 - x + \frac{x}{4}$

$A = \text{Interseca}(f, g)$

$\rightarrow (116,\ 87)$

$h(x) = f(x) - g(x)$

$\rightarrow x - \frac{x}{4} - \left(174 - x + \frac{x}{4}\right)$

$B = \text{Raíz}(h)$

$\rightarrow (116,\ 0)$

$C = \text{Interseca}(h, \text{EjeY})$

$\rightarrow (0,\ \text{-}174)$

Figura 10.14

componen la ecuación, que hacen que las imágenes de cada función para esos valores sean iguales.

2. Construyendo una función (h(x)) con la diferencia entre las expresiones algebraicas de los dos miembros de la ecuación y determinando el (los) punto(s) de intersección de esta función con el eje de abscisas.

En figura 10.14 parecen los comandos de GeoGebra utilizados para la solución de las ecuaciones, para la variante (1) el comando Interseca devuelve las coordenadas del punto de intersección de ambas funciones y para la variante (2) el comando Raíz devuelve el punto de intersección de la función con el eje de abscisas y en este caso, la segunda componente de ese punto o imagen de la función es 0 (cero).

Solución por la vía algebraica mediante un sistema de ecuaciones.

Algunas reglas que facilitan la comprensión del problema por esta vía:

a) Asigne una variable a uno de los elementos desconocidos.

b) Asigne otra variable al otro elemento desconocido.

c) Exprese mediante un sistema de ecuaciones las condiciones del problema atendiendo a la relación parte-todo.

d) Resuelva el sistema de ecuaciones.

e) Constate que los resultados son correctos y dé respuesta al problema.

Asignemos x al peso en kilogramos de S1.		Asignemos y al peso en kilogramos de S2.

Como que el peso de S1 y S2 son las partes de un todo, los 174 kg de arroz, la primera ecuación expresa esa relación $x+y=174$
La segunda ecuación expresa la condición del problema: de un saco se extrae su cuarta parte y echa en el otro logrando que ambos tengan la misma cantidad. $\boldsymbol{x-\frac{x}{4}=y+\frac{x}{4}}$
El sistema queda planteado de la siguiente forma $\boldsymbol{\begin{cases} x+y=174 \\ x-\frac{x}{4}=y+\frac{x}{4} \end{cases} \begin{cases} x+y=174 \\ \frac{x}{2}-y=0 \end{cases}}$; $\boldsymbol{\frac{3x}{2}}$ =174 ; x=116 ; y=58 Respuesta S1=116 kgS2 = 58 kg

Con el planteamiento de un sistema de ecuaciones la modelación matemática está “más cercana” a las condicione del problema y la representación gráfica y la solución mediante GeoGebra se corresponde con la definición de sistema de ecuaciones y la solución de un sistema de ecuaciones como se muestra en la imagen de la Figura 10.15.

Por otro lado, se simplifican los comandos utilizados como se muestra en Figura 10.16.

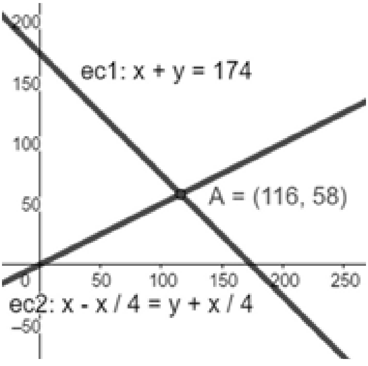


Figura 10. 15

$$ec1 : x + y = 174$$

$$ec2 : x - \frac{x}{4} = y + \frac{x}{4}$$

$$A = \text{Interseca}(ec1, ec2)$$

$$\rightarrow (116, 58)$$

Figura 10. 16

10.3. Después de Polya

Después de Polya muchos autores han propuesto modelos que modifican o perfeccionan el modelo de Polya, pero casi todos se mueven en un entorno de sus planteamientos.

Un resumen de los principales modelos se muestra a continuación:

10.3.1. Modelo de Polya para la resolución de Problemas

Para su modelo George Polya se basó en las observaciones que había hecho como profesor de matemática y en la obra de algunos psicólogos. El modelo consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y la solución de éste:

1. Comprender el problema,
2. Concebir el plan,
3. Ejecutar el plan
4. Examinar la solución obtenida.

Este autor propone un conjunto convenientemente formuladas, para dirigir el proceso de solución de un problema.

Para comprender el problema se hace necesario dirigir la reflexión sobre:

¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

Para concebir el plan, deben centrarse en:

¿Se ha encontrado con un problema semejante?

¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

¿Conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Para la ejecución del plan debe indicarse:

Compruebe cada uno de los pasos, al ejecutar su plan de la solución.

¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Al examinar la solución se indica hacer una visión retrospectiva de lo realizado, proponiendo las preguntas siguientes:

¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?

¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

10.3.2. Modelo de Bell para la resolución de problemas

Este autor también divide en pasos el proceso de resolución de problemas y sugiere en cada uno de ellos un conjunto de técnicas o estrategias cuya implementación, potencialmente, conduce a la solución.

Las etapas de modelo de Bell, así como su caracterización es explicada por Fredy González en su libro "El corazón de las Matemáticas" (p. 11).

1. Presentar el problema en forma general.
2. Reformular el problema en forma operacional.
3. Formular hipótesis y procedimientos alternativos para atacar el problema.
4. Probar las hipótesis y llevar a cabo procedimientos que permitan obtener una solución o conjunto de soluciones.
5. Analizar y evaluar las soluciones, las estrategias usadas para obtenerlas y los métodos que condujeron al descubrimiento de estrategias para resolver el problema.

Presentar el problema en forma general:

El problema debe plantearse de manera que estimule el pensamiento creativo y divergente y así el estudiante puede descubrirlo y percatarse de su existencia. Se sugiere para encontrar problemas en Matemática las alternativas siguientes:

a) Observar modelos.

b) Buscar relaciones.

c) Observar correspondencias y tratar de encontrar analogías entre diferentes objetos matemáticos.

d) Tratar de encontrar relaciones en los problemas que ya han sido resueltos.

e) Establecer generalizaciones.

f) Buscar propiedades comunes entre diferentes objetos.

Reformular el problema en forma operacional.

Esta etapa consiste en reformular el problema de forma más precisa, expresarlo en términos más claros, de manera que dé oportunidades para encontrar vías para resolverlo. Bell sugiere las siguientes preguntas para ayudar a la reformulación de un problema: ¿Tiene sentido este problema? ¿Vale la pena o es interesante este problema? ¿Entiende usted este problema? ¿Qué significa el problema? ¿Es este problema muy general? ¿Qué es lo conocido? ¿Qué es lo desconocido? ¿Existe suficiente información en el enunciado del problema? ¿Puede el problema ser expresado de una manera más significativa? ¿Puede el problema ser dividido en varios subproblemas?

Formular hipótesis y procedimientos alternativos para atacar el problema.

En esta etapa se buscan vías que probablemente conduzcan a la solución del problema. Para la búsqueda de estrategias y enfoques que permitan atacar el problema, el sujeto debe preguntarse: ¿Qué es lo dado? ¿Qué debe ser encontrado? ¿Qué actividades pueden proporcionar nueva información? ¿Qué especulaciones parecen ser más razonables? ¿Qué procedimientos pueden ser empleados para probar o desaprobar conjeturas?

Probar las hipótesis y llevar a cabo procedimientos que permitan obtener una solución o conjunto de soluciones.

En el modelo de Bell esta es la etapa crucial, porque en ella se resuelve el problema o se rechazan las conjeturas planteadas en torno al problema. Las técnicas planteadas por Bell coinciden con las sugeridas por Polya, pero este último las ha puesto en fases diferentes. Entre las técnicas sugeridas para dirigir el proceso de resolución de problemas están:

a) Asegúrese que usted conoce correctamente las definiciones de cada uno de los conceptos que son usados en el enunciado del problema.
b) Asegúrese que usted comprende el problema.
c) Recordar si ha resuelto algún problema similar.
d) Analizar si la resolución de un caso particular puede indicar algún procedimiento válido para el caso general.
e) Considerar que, al resolver un problema más general, el problema que usted ha considerado quede como un caso particular.
f) Tomar en cuenta toda la información dada, que podría ser empleada para resolver el problema.
g) Observar las implicaciones directas en la información dada, que podrían proporcionar información adicional.
h) Tratar de comenzar en el medio y trabajar en ambas direcciones o comenzar con la solución deseada y trabajar hacia la información dada.
i) Tratar de descomponer el problema en partes relacionadas y resuelva cada parte separadamente.
j) Escribir el problema en una secuencia ordenada de problemas más sencillos.
k) Utilizar si es posible, técnicas de otras ramas de estudio para resolver el problema.
l) Localizar fuentes adicionales que contengan información que pueda ser útil en la solución del problema.
m) Dibujar una figura o emplear construcciones auxiliares (sí se trata de demostrar un teorema).
n) Sacar conclusiones de la información dada, aún cuando parezca que no tiene relación con la solución que se está tratando de encontrar.
o) Agregar al problema, alguna condición adicional, que pueda restringirlo y, a la vez, hacerlo más fácil.
p) Tomar el enfoque opuesto y tratar de probar que el problema no tiene solución.

q) Discutir el problema con otras personas.

r) Dejar el problema por un tiempo y póngase a hacer otra cosa.

s) Tener cuidado de no desarrollar un círculo vicioso y plantear una estrategia que no conduzca a nada; pero no descarte una estrategia muy rápidamente.

Analizar y evaluar las soluciones, las estrategias usadas para obtenerlas y los métodos que condujeron al descubrimiento de estrategias para resolver el problema.

En esta fase se pretende que el solucionador, analice y evalúe el método empleado para resolver el problema, con el fin de determinar cuán eficiente es, si puede ser mejorado o no y si puede ser aplicado a alguna clase general de problemas. Para evaluar la solución y el proceso para alcanzarla, se sugieren las siguientes preguntas: ¿Es correcta la solución?, ¿Cómo chequeo usted el resultado?, si existen soluciones alternativas, ¿Es alguna de ellas más apropiada que las otras?, ¿Existen otras formas de resolver el problema?, ¿Los argumentos empleados para obtener la solución, son válidos?, ¿Qué formas de argumentación específicas fueron empleadas?, ¿Usó alguna forma de argumentación no familiar que pueda ser útil en la solución de otros problemas?, ¿La estrategia para resolver este problema puede ser usada para resolver otros problemas del mismo tipo?, ¿Puede usar la misma estrategia para resolver problemas relacionados?, ¿Qué aprendió acerca de la resolución de problemas en general, como consecuencia de la resolución de este problema particular?, ¿Qué dificultades particulares encontró resolviendo este problema y cómo puede evitarlas en el futuro?, ¿Intentó usted una estrategia que probó no ser útil?

10.3.3. Modelo de Fridman para la resolución de Problemas

En el texto "Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas de matemática", Fridman, ofrece un modelo con las siguientes etapas:

1. Análisis del problema.
2. Escritura esquemática del problema.
3. Búsqueda del plan de solución.

4. Ejecución del plan de solución.
5. Prueba del plan de solución investigación del problema.
6. Formulación de la respuesta al problema.
7. Análisis final de la solución del problema.

Vamos a caracterizar brevemente esas etapas.

Análisis del problema. Es evidente que, al recibir un problema, lo primero que hay que hacer es entender de qué problema se trata, cuáles son sus condiciones y cuáles sus exigencias.

El análisis de un problema se puede realizar con diferente grado de profundidad. La profundidad del análisis depende fundamentalmente de sí ya conocemos el tipo de problema al que pertenece el problema que estamos analizando, y de sí conocemos el método general de solución de dicho tipo de problema. Si esto es así, entonces es suficiente un análisis simple que se reduce a identificar el tipo de problema; si no, entonces es necesario un análisis más profundo para determinar el plan de solución. Frecuentemente el análisis de un problema requiere enormes esfuerzos.

El análisis debe estar orientado hacia las exigencias y para ello es necesario esclarecer la esencia de esas exigencias, es decir, establecer con precisión qué es lo que se necesita encontrar, determinar o hacer en el problema.

La habilidad para analizar un problema, para comprender y descifrar su esencia, es el componente más importante en la habilidad general para resolver problemas.¡Sin hacer el análisis es imposible resolver un problema ¡

La escritura esquemática de un problema. Los resultados del análisis preliminar del problema deben ser de alguna manera consignados, fijados. Esa forma compacta, cómoda, clara e ilustrativa de fijar los resultados del análisis se conoce con el nombre de escritura esquemática del problema. No es obligatorio hacer una escritura esquemática para cada problema.

Búsqueda del plan de solución del problema. El análisis del problema y la elaboración de su escritura esquemática son necesarios fundamentalmente para encontrar el plan de solución. Sobre esta etapa precisaremos posteriormente más elementos.

Ejecución del plan de solución. Es la implementación del plan encontrado.

Prueba de la solución del problema. Una vez que la solución ha sido ejecutada y descrita, es necesario convencerse de que dicha solución es correcta, de que satisface todos los requerimientos del problema.

Investigación del problema. Durante la solución de muchos problemas, además de la prueba, es necesario realizar una investigación del problema, para establecer bajo cuáles condiciones el problema tiene solución y cuántas son las soluciones en cada caso posible; bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc.

Formulación de la respuesta al problema. Una vez convencidos de la exactitud de la solución y, en caso necesario, de haber realizado la investigación del problema, es necesario formular de manera precisa la respuesta al problema.

Análisis final de la solución del problema. Con fines cognoscitivos y de aprendizaje, es también útil realizar el análisis final de la solución obtenida, en particular, determinar si no existe otro modo (vía) más racional para resolver el problema, cuáles son las conclusiones que se pueden derivar de la solución, etc.

La estructura del proceso de la solución de un problema depende en primer término del carácter del problema mismo y, por supuesto, de cuáles sean los conocimientos y habilidades que posee quienes resuelven el problema.

Las etapas anteriores no están separadas una de la otra, sino que se entrelazan. El orden las etapas también puede cambiar en ocasiones. No todas las etapas son obligatorias, está en dependencia de las exigencias del problema y de la preparación de los estudiantes para enfrentar su resolución.

10.3.4. Modelo de Jungk para la resolución de Problemas

En las Universidades Pedagógicas de Cuba, hoy integradas a las distintas universidades del país como facultades pedagógicas, en la Didáctica de la Matemática se utiliza para el tratamiento de problemas y ejercicios con texto, el modelo del Dr. Werner Jungk, (denominado programa heurístico general) es empleado también por otros didactas alemanes como Wolfgang Zillmer y Horst Müller, consta de las siguientes etapas:

1. Orientación hacia el problema,
2. Trabajo en el problema.
3. Solución del problema
4. Evaluación de la solución y la vía (Jungk, 1981).

Expondremos un breve análisis de las acciones principales de cada etapa, por su importancia en el proceso de resolución de problemas (Jungk, 1981).

Orientación hacia el problema. Esta etapa comprende la motivación del problema, el planteamiento del problema y comprensión del enunciado del problema. El alumno comprende el enunciado del problema cuando es capaz de reproducirlo con sus propias palabras y analizar cuáles son sus componentes esenciales. Para comprender el enunciado del problema es necesario responder una serie de preguntas:

- ¿De qué se trata en el problema?, ¿Qué datos nos dan?, ¿Qué se busca?
- ¿Determinan los datos la solución del problema?, ¿No son suficientes?, ¿Sobran?
- ¿Podría proponerse el problema de otra manera?, ¿Puede hacerse un esbozo o gráfico que esclarezca la situación?

Trabajo en el problema. En esta etapa se precisa el problema, se analizan los medios, y se busca una idea de solución. El encontrar una idea de solución (o vía de solución) es un proceso de análisis para el cual se pueden sugerir algunas actividades como:

- Formular las relaciones entre los datos y la incógnita.

- Tratar de relacionar el problema con otro conocido y cuya solución sea más simple o inmediata.

- Transformar o introducir una nueva incógnita, acercándola a los datos.

- Transformar los datos, obtener (o deducir) nuevos elementos más próximos a la incógnita.

- Recordar la solución de ejercicios análogos.

- Analizar si se han tenido en cuenta todos los datos.

- Generalizar el problema, si es posible.

- Analizar casos particulares.

- Resolver problemas parciales (considerar solo una parte de las condiciones).

- Hacer gráficos que ilustren las relaciones encontradas.

Como se puede apreciar esta es la etapa principal para la solución de problemas, donde los alumnos deben poner en juego todos los conocimientos y habilidades adquiridos para resolver el problema.

Solución del problema. En esta etapa se ejecuta el plan de solución obtenido en la fase anterior y se representa la solución del problema. Este es un proceso de síntesis y se debe fundamentar la corrección de cada paso, realizar los cálculos necesarios, resolver ecuaciones, simplificar, transformar expresiones, etc.

Evaluación de la solución y la vía. Esta etapa comprende la comprobación de la solución, la determinación del número de soluciones, se señalan casos especiales, posibilidad de transferir la vía de solución a otros ejercicios.

En esta etapa es necesario plantearse preguntas como las siguientes: ¿Es lógico el resultado?, ¿Por qué?, ¿Es posible comprobar la solución?, ¿Cómo?, ¿Es posible resolver el problema por una vía más corta?, ¿Qué otro resultado se puede obtener por esta vía?

Estas ideas constituyen una sucesión de indicaciones que ayudan a reflexionar, a buscar los medios matemáticos y la idea de solución.

10.3.5. Modelo de Schoenfeld para la resolución de Problemas

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. En este modelo distingue también cuatro fases:

1. Análisis.

2. Exploración.
3. Ejecución.
4. Comprobación.

Análisis: Las acciones a realizar en esta fase son:

- Traza un diagrama si es posible.
- Examinar casos particulares:

a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.

b) Examinar casos límites para explorar la gama de posibilidades.

c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1,2... y busca una pauta inductiva.

- Probar o simplificar el problema:

a) Sacando partida de posibles simetrías o,

b) Mediante razonamientos.

Exploración: En exploración se debe:

- Examinar problemas esencialmente equivalentes:

a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.

b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.

c) Introduciendo elementos auxiliares.

- Replanteando el problema mediante:

a) Cambio de perspectiva o de notación.

b) Considerando el razonamiento por contradicción o el contrarrecíproco.

c) Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

- Examinar problemas ligeramente modificados:

a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones)

b) Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.

c) Descomponer el problema por caso y estudiar caso por caso.

- Examinar problemas ampliamente modificados:

a) Construir problemas análogos con menos variables.

b) Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.

c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.

d) Recordar que al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida para esta fase se indica:

- ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?
- ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
- ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
- ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
- ¿Verifica los criterios generales siguientes?
- ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
- ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

10.3.6. Modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de Problemas

Uno de los últimos modelos publicados es el de Miguel de Guzmán (1991), que sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor:

1. Familiarízate con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Lleva adelante tu estrategia.
4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

Familiarízate con el problema.

- Trata de entender a fondo la situación.
- Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.
- Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

Búsqueda de estrategias.

- Empieza por lo fácil.
- Experimenta.
- Hazte un esquema semejante, una figura, un diagrama.
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- Busca un problema semejante.
- Inducción.
- Supongamos el problema resuelto.
- Supongamos que no.

Lleva adelante tu estrategia.

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se hayan ocurrido en la fase anterior.
- Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.
- ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿Por qué no llegaste?
- Trata de entender no solo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
- Mira si encuentras un camino más simple.
- Mira hasta dónde llega el método.

- Reflexione sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

10.4. Resumen comparativo de los principales modelos propuestos para la resolución de problemas

En la tesis “Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistido por computadoras” el Dr. Eric Crespo los resume los modelos propuestos para la resolución de problemas en la siguiente tabla donde se evidencia la correspondencia entre las distintas etapas según los distintos modelos, división que algunos hacen de tales etapas respecto al modelo de Polya o la unificación de etapas:

Polya	**Schoenfeld**	**Bell**	**Fridman**	**Jungk**	**de Guzmán**
Comprender el problema.	Analizar y comprender el problema.	Presentar el problema en forma general.	Análisis del problema.	Orienta-ción ha-cia el pro-ble-ma.	Familiarí-zate con el proble-ma.
		Reformular el problema en forma opera-cional.	Escritura es-quemática del problema.		
Concebir el plan.	Diseñar y pla-nificar solucio-nes.	Formular hi-pótesis y pro-cedimientos alternativos para atacar el problema.	Búsqueda del plan de solu-ción.	Trabajo en el problema	Búsqueda de estrategias.
Ejecutar el plan.	Explorar solu-ciones.	Probar las hipótesis y llevar a cabo procedi-mien-tos que per-mitan obtener una solución o conjunto de soluciones.	Ejecución del plan de solu-ción.	Solución del problema.	Lleva adelante tu estrategia.

<table>
<tr><td rowspan="3">Examinar la solución obtenida.</td><td rowspan="3">Comprobar la solución.</td><td rowspan="3">Analizar y evaluar las soluciones, las estrategias usadas para obtenerlas y los métodos que condujeron al descubrimiento de estrategias para resolver el problema.</td><td>Prueba del plan de solución investigación del problema.</td><td rowspan="3">Evaluación de la solución y la vía.</td><td rowspan="3">Revisa el proceso y saca consecuencias de él.</td></tr>
<tr><td>Formulación de la respuesta al problema.</td></tr>
<tr><td>Análisis final de la solución del problema.</td></tr>
</table>

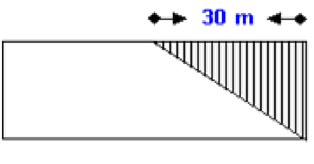
Ejercicios y problemas propuestos

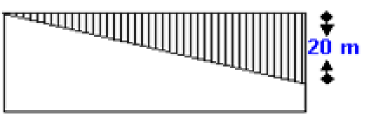
X.1 Una de las obras que se construyen para competencias deportivas es abastecida de arena por camiones de 8,0 m3 y 4,5 m3 de capacidad. Si en un día llegaron 33 camiones que transportaron 187 m3 de arena. ¿Cuántos viajes de cada tipo llegaron a la obra ese día?

X.2 El promedio de las notas de un estudiante en Física, Química y Matemática es 88 puntos. Si hubiera obtenido 100 puntos en Matemática el promedio sería 92 puntos; pero si en lugar de obtener 100 puntos en Matemática los hubiera alcanzado en Química, el promedio sería 94 puntos. ¿Qué promedio hubiera alcanzado obteniendo 100 puntos en Física?

X.3 En un viaje de 930 km en bicicleta, un muchacho recorrió en los dos primeros días la misma distancia, el tercer día solo pudo recorrer la mitad de lo recorrido el día anterior y el cuarto, la tercera parte de lo recorrido el tercer día. Antes de proseguir el viaje, el quinto día, se sorprende cuando vio que solo le quedaba por recorrer 5,0 km y 200 m. ¿Qué distancia recorrió diariamente?

X.4 Una empresa tiene un terreno rectangular de 1500 m2 de superficie. Por necesidad de una obra social le piden que done una parte del mismo en una de las siguientes opciones:





La empresa escogió la primera variante ya que así cedía 50m2 menos. Determine las dimensiones originales del terreno.

X.5 Dos ciclistas se entrenaban para una competencia y en ese momento la suma de los cuadrados de sus pesos era igual a 6100 kg. Se conoce que uno de los ciclistas pesaba 10 kg. más que el otro. Finalmente, uno de los ciclistas no pudo participar en la competencia. Durante el evento el ciclista participante bajó de peso la misma cantidad de kilogramos que aumentó el ciclista que no participó, alcanzando así ambos el mismo peso.

Calcula el peso de los ciclistas después de celebrada la competencia.

X.6 Dos fábricas producen el mismo tipo de piezas. Juan trabaja en una de ellas y David en la otra. Entre ellos tiene lugar el siguiente diálogo:

Juan: Si mi fábrica lograse aumentar su producción diaria en 19 piezas, entonces produciría cada día el doble de lo que tu fábrica produce diariamente.

David: ¿Tú conoces la producción diaria del país?

Juan: Sí, es de 87 piezas.

David: Pues si tu fábrica produjese diariamente 2 piezas menos, entonces el cuadrado de esa producción sumado con lo que el país produce diariamente sería 8 veces lo que nuestras dos fábricas juntas producen al día en estos momentos.

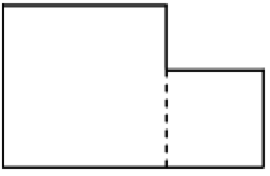
¿Cuántas piezas producen diariamente cada fábrica?

X.7 De un trapecio de 49 cm2 de área se conoce que la base menor mide 4,0 cm y que la base mayor excede en 3,0 cm a la altura. Calcula el área que tendría el trapecio si la base mayor fuese 2,0 cm más corta.

X.8 Las tres cifras de un número suman 13. Si del número se resta 270 se obtiene otro número de tres cifras en el cual resultan intercambiadas la cifra de las centenas y de las decenas, pero se conserva la cifra de las unidades. El número de dos cifras formado por la cifra de las decenas y la de las unidades del número original es igual a 6 veces la cifra de las centenas. ¿Cuál es el número?

X.9 Un terreno rectangular tiene 30 m de ancho y 50 m de largo. ¿En cuántos metros debe disminuirse el ancho y en cuántos aumentarse el largo para que el perímetro aumente en 30 m, sin cambiar el área?

X.10 Con dos cuadrados se forma una figura de seis lados como se muestra en el dibujo. Calcula las longitudes de los lados de los cuadrados sabiendo que la figura obtenida tiene 233 cm2 de área y 68 cm de perímetro.



X.11 Dos fábricas debían producir entre ambas, según sus respectivos planes de producción, 360 bicicletas. La primera de ellas cumplió su plan al 112% y la segunda al 110% y entre las dos produjeron 400 bicicletas.

a) ¿Cuál era el plan de producción de cada fábrica?

b) ¿Cuántas bicicletas produjo cada fábrica?

X.12 En un taller de piezas de repuesto había en total 120 piezas de dos tipos. Una empresa adquirió la mitad de las piezas del tipo I y tres cuartos de las piezas del tipo II. Si lo que quedó es el 40% de las piezas que había inicialmente, calcula cuántas piezas de cada tipo había al principio.

X.13 Un número de cuatro cifras es mayor que 1000 pero menor que 2000. La cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas disminuida en 2. La cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 11. ¿Cuál es el número?

X.14 Se tienen dos planchas una de zinc y otra de aluminio, de igual área y se recorta un cuadrado en cada plancha de manera tal que sobran 4 m2 en la plancha de zinc y 11m2 en la de aluminio. Si la longitud del lado del cuadrado recortado en la plancha de aluminio es igual al 75% de la longitud del lado del cuadrado que se recortó en la plancha de zinc ¿Cuál es el área de cada cuadrado recortado?

X.15 Cuando lo mensajes no se enviaban por WhatsApp en cierto país, el precio que hay que pagaba por enviar un telegrama se calcula de la siguiente manera: Si el telegrama tiene 10 palabras o menos se pagaba un precio fijo. Si tenía más de 10 palabras, entonces se paga el precio fijo (por las primeras diez palabras) más una cierta cantidad extra por cada palabra adicional.

Un telegrama de 15 palabras costaba 11, 65 pesos y un telegrama de 19 palabras costaba 14, 57 pesos. ¿Cuál era el precio fijo y cuál es la cantidad extra por cada palabra adicional?

X.16 En un centro escolar hay dos terrenos de forma cuadrada para desarrollar las actividades de Educación Física, la suma de sus áreas es igual a 41 unidades cuadradas y la mitad del perímetro del terreno más grande excede en 6 unidades al lado del otro terreno. ¿Qué longitud total de cerca metálica se necesita para cercar los terrenos?

X.17 En un centro deportivo hay 400 atletas varones más que hembras. Se decidió trasladar para otro centro al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro inicial 100 hembras más que varones. ¿Cuántos atletas de cada sexo se quedaron en el centro deportivo?

X.18 Una empresa de la industria electrónica produce teclados y pantallas para calculadoras gráficas en dos plantas: en la A y en la B. En la planta A se fabrican 14 teclados y 9 pantallas por hora y en cada jornada de 8 horas se desechan como promedio 2 teclados y 2 pantallas. En la planta B, de más moderna tecnología, se producen 55 teclados y 55 pantallas por hora. ¿Cuántas jornadas de 8 horas debe trabajar cada planta para que conjuntamente produzcan 1210 teclados y 1090 pantallas?

X.19 Dos camiones distribuyeron cierta cantidad de materiales, de modo que cada uno transportó la mitad. El primer camión realizó 17 viajes, transportando siempre el máximo de su capacidad, excepto en el último viaje que solo utilizó el 50% de su capacidad. El segundo camión dio un viaje más y en cada viaje transportó una tonelada menos que la capacidad máxima del primer camión. ¿Cuántas toneladas de materiales transportaron entre los dos camiones?

X.20 En febrero una casa de vivienda consumió en el mes, durante el período nocturno el doble de la electricidad que consumió durante el período diurno. Medidas internas aplicadas en ese núcleo familiar hicieron que, en marzo, durante el período nocturno, el consumo eléctrico del mes disminuyera en un 25% y durante el período diurno se ahorra un 20%, lo que hizo que el consumo eléctrico de la vivienda este mes fuese de 184Kwh ¿En qué tanto por ciento disminuyó el consumo de energía de un mes a otro, una vez aplicadas las medidas?

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, I. (2001). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. (Tesis doctoral). Universidad de Oriente.

Álvarez Saiz, E. (2015). Ejercicios resueltos: Funciones de varias variables. Universidad de Cantabria.

Álvarez, C. (1995). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Ministerio de Educación Superior. Cuba.

Arya, J., Lander, R., & Ibarra, V. H. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la Economía. Pearson Educación.

Babini, J. (1979). Historia de las ideas modernas en matemática. Universidad de Buenos.

Bell, E. T. (2010). Los Grandes Matemáticos. Tauro.

Bransford, J. D., & Stein, B. S. (1986). The ideal problem solver. A guide for improving thinking, learning and creativity. Freeman and Company.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1998). Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación.

Conner, C. D. (2009). Historia popular de la ciencia. Mineros, comadronas y mecánicos. Científico Técnica.

Davidson, L. J., Reguera, R., Frontela, R., & Díaz, M. (2005). Problemas de Matemática Elemental. Pueblo y Educación.

Demidovich, B. (2000), Problemas y ejercicios de análisis matemático. Addison Wesley.

Díaz Gómez, J. L. (2010). Problemas Resueltos de Funciones. Universidad de Sonora.

Falconí Asanza, A., Hernández Crespo, F. M., & López Fernández, R. (2020). Matemática en Espiral. Universo Sur.

Fridman, L. M. (2000). Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas de matemática. MIR.

Fundación Wikimedia. (2020). Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

Galindo, E., & Gortaire, D. (2006). Matemáticas Superiores, teoría y ejercicios. Prociencia editores.

García Garrido, L. (2012). Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Lógica. Universidad de La Habana.

García Leal, D. (1990). Anillos y Polinomios. Editorial Pueblo y Educación.

Hohenwarter, M. (2019). GeoGebra Manual Oficial. http://www.geogebra.org

Jungk, W. (1982). Conferencia sobre metodología de la enseñanza matemática. (Tomo II). Editorial Pueblo y Educación.

Kalnin, R. A. (1988). Algebra Y Funciones Elementales. Moscú: MIR.

Kurosch, A. G. (1977). Curso de Álgebra Superior. Editorial MIR.

Labarrere, A. (1994). Pensamiento. Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos. Ángeles Editores.

Lara, J., & Arroba, J. (2012). Análisis Matemático. Universidad Central del Ecuador.

Leal Acosta, M., Ron Galindo, J., Báez Arbesú, L., Navarro Casabuena, L., Oramas Hernández, C., Reyes Abreu, D., & Gil Carrabeo, C. (2015). Estructuras algébricas y polinomios. Pueblo y Educación.

Lehmann, C. H. (1966). Geometría Analítica. La Habana: Edición Revolucionaria.

Marqués, P. (2011). Impacto de las TIC en el mundo educativo. Funciones y limitaciones de las TIC en educación. http://dewey.uab.es/pmarques/siyedu.htm

Mason, F. (1985). Phenomenography. Describing conceptions of the worl arounds Instructional Science, 10, 117-200.

Mayer, F. (1983). Describing and improving learning. En, R. R. Schemeck (Ed), Styles and strategies of learning. (pp. 83-100). Plenum.

Micheline, C., & Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En Las capacidades humanas. (pp. 293-323). Ed. Labor Universitaria.

Ochoa Rojas, R. (2008). Funciones y temas afines (Vol. II). Pueblo y Educación.

Pérez, M. P. (1993). La solución de problemas en Matemática. UAM.

Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Ed. John Wiley and Sons.

Sánchez, L. (2015). Iniciação ao estudo das funções Reais de variável real. Universidade de Lisboa.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematics, technology and higher order thinking. in technology in education series. LEA Publishers.

Sessa, G. F. (2015). Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Editorial Universitaria.

Spiegel, M. R. (2010). Algebra Superior. McGraw-Hill.

Stewart, J. (2011). Cálculo con trascendentes tempranas. Editorial Pueblo y Educación.

Swokowski, E., & Cole, J. (2007). Algebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo Editorial Ibero América.

Thomas, G. (2010). Cálculo en una variable. Addison Wesley.

Torres Lima, P. (1997). Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. (Tesis Doctoral). ISP Capitán Silverio Blanco.

Wiltrock, R. (1990). Comprensión y representación. Macmillan Publishing Company.

Wooton, W., Beckenbach, E. F., & Fleming, F. J. (1985). Geometría Analítica Moderna. Cultural S. A.

Índice

Indudablemente, que se ha escrito mucho sobre funciones matemáticas desde que en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables, Leibniz acuñó los términos «función», «variable», «constante» y «parámetro» y la notación f(x) fue utilizada por el francés Alexis Claude Clairaut, y el suizo Leonard Euler en 1736, pero en este libro se analiza toda la teoría clásica de la funciones algebraicas, contextualizada al siglo XXI, al inserta en el libro las posibilidades que ofrece para ese análisis el asistente matemático GeoGebra, el cual mezcla la posibilidades de un potente editor gráfico y las bondades del cálculo algebraico. Sobre esta línea de pensamiento los autores sobrepasan el tradicional estudio de las funciones elementales y sus propiedades, e introducen problemas del análisis matemático como son los relacionados con el límite, la derivada, los máximos y mínimos de funciones así como los ceros y puntos de inflexión, sin agobiar al lector con las complejidades de los temas de Matemá-tica Superiores, pero sin sacrificar el rigor matemático, para ello se insertan gradualmente numerosos gráficos y ejemplos prácticos de las distintas variantes que adoptan las funciones así como sus posibles combinaciones y composiciones, las cuales generan nuevas funciones cualitativamente distintas a las originales. En el libro se combina la complejidad de las expresiones matemáticas con un lenguaje accesible a cualquier lector que posea una elemental cultura matemática, al tiempo que lo introduce en el mágico mundo de la historia de la matemática, que en este caso va desde las pintorescas discusiones entre Tartaglia y Cardano por la paternidad de la fórmula para resolver la ecuación cúbica hasta las trágicas vidas y muertes de Evaristo Galois y Niels Henry Abel, los genios que demostraron la imposibilidad de resolver mediante radicales las ecuaciones de grado superior al cuarto.

EDITORIAL UNIVERSO SUR

FUNDACIÓN METROPOLITANA

ISBN: 978-959-257-616-2

9 789592 576162